EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

21e JAARGANG 1945/46
(de jaargang 1944/45 is overgeslagen)

Nr. 5, 6

ZIE INLIGGEND PROSPECTUS

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1945 t/m 31 Augustus 1946 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

EEN HISTORISCHE BIJZONDERHEID UIT HET LEVEN VAN GASPARD MONGE (1746—1818)

door

M. G. BEUMER.

Het feit, dat de Beschrijvende Meetkunde gelijk wij die heden ten dage kennen, haar wieg heeft gehad in Frankrijk en dat aldaar Gaspard Monge de grondslagen legde van deze wetenschap, is tegenwoordig in brede kringen welbekend. De lezers van „Euclides" en het „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" kennen dezen Fransen geleerde bovendien reeds uit de publicaties van Prof. Dr Hk. de Vries, die uitvoerig Monge's buitengewone wetenschappelijke aanleg en bekwaamheden beschreef; het is niet nodig deze hier te herhalen, daar de helder geschreven „Historische Studiën" overigens geen uitleg van node hebben [1]). Wel is er een aanvulling in de Monge-biographie mogelijk; bij de laatste onderzoekingen van Prof. Dr Ernst Cohen kwam er een bijzonderheid aan het licht, die een zich uitsluitend tot de vakliteratuur beperkende mathematicus niet licht zal ontmoeten, daar haar publicatie in een physisch gedenkboek en een chemisch tijd-



Gaspard Monge, 1746—1818, de grondlegger van de beschrijvende meetkunde.

[1]) Vgl. N. Tijdschr. v. Wisk. **3** (1915/'16), 255—269; Historische Studiën XIV, N. Tijdschr. v. Wisk. **22** (1934/'35), 72—94, i.h.b. 91; Hist. Stud. XX, Euclides **14** (1937/'38), 137—179; Hist. Stud. XXII, Chr. Huygens **17** (1938/'39), 182—237. (In het boek „Historische Studiën III" dragen de laatstgenoemde twee artikelen de nummers XVIII opv. XX.)

schrift plaats vond [1]). Een vermelding van deze bijzonderheid moge op deze plaats gerechtvaardigd zijn, daar hierdoor een scherp licht wordt geworpen op de grote genialiteit van den vader der Beschrijvende Meetkunde; men zou deze mededeling kunnen opvatten als een aanvulling tot de meer uitvoerige levensbeschrijving van Gaspard Monge, die Prof. de Vries voor enige jaren publiceerde.

Bij het historisch onderzoek naar de kwestie, wie het eerst een gas in vloeibare toestand zou hebben gebracht, een prioriteit die lange tijd is toegekend aan onze landgenoten Martinus van Marum en Paets van Troostwijk [2]), stieten Ernst Cohen en zijn echtgenote, nadat zij door proefnemingen hadden aangetoond, dat deze beide Hollandse physici de hun toegeschreven ontdekking niet toekomt, op de volgende mededeling in het voor die tijd bekende standaardwerk van de Fourcroy, Système des connaissances chimiques (Paris 1800) [3]): „Le gaz acide sulfureux „réfracte fortement la lumière, sans s'altérer; il se dilate ou se „rarifie par la calorique, et il est susceptible de se liquifier à 28.0 „degrés de refroidissement. Cette dernière propriété, découverte par „les citoyens Monge et Clouet, et qui les éloigne des autres „gaz, paraît être due à l'eau qu'il retient en dissolution, et à laquelle „il adhère si fortement, qu'elle s'oppose à ce qu'on estime précision „les proportions de son radical et de son acidifiant". De Fourcroy geeft hier een verkeerde verklaring; de bereidingswijze van droog zwaveldioxyde gas was reeds in die dagen zeer wel mogelijk, en dit wordt vloeibaar bij — 10°. Verder moeten de betreffende resultaten vóór 1795 bereikt zijn, daar zij in dat jaar in een chemisch woordenboek worden vermeld. Hoewel de originele verhandeling van Monge en Clouet niet is teruggevonden, blijft de gehele vermelding van de Fourcroy — afgezien van zijn foute verklaring — zeer aannemelijk, temeer daar zowel Gaspard Monge als de chemicus Louis Clouet tot ongeveer 1780 aan de beroemde krijgsschool te Mézières werkzaam waren, over welke bezigheid men het artikel van Prof. de Vries raadplege.

Aan Gaspard Monge komt dus — tezamen met Louis Clouet — de eer toe, de prioriteit te bezitten inzake de vloei-

---

1) E. Cohen u. W. A. T. Cohen—de Meester, Wer hat zum ersten Mal ein Gas verflüssigt? Verhandelingen, aangeboden aan P. Zeeman (Den Haag 1935), blz. 395—402; idem, Bis repetitia desiderantur. Recueil des trav. chimiques d. Pays-Bas 59 (1940), 583—592.

2) Zie bv. J. A. Kok, Naar het absolute nulpunt (Utrecht z. j.), blz. 25.

3) Tome II, p. 74.

baarmaking van gassen. Zij verheffen zich hierdoor boven van Marum en Paets van Troostwijk, die de fout van hun proefnemingen — zij verwarden ammoniakoplossing met vloeibaar ammoniakgas — niet inzagen, en ook boven den Engelsman Thomas Northmore, die eerst in 1805 er in slaagde het chloorgas vloeibaar te maken.[1]) Hiermede hebben deze beide Franse geleerden de eerste schrede gedaan op de weg naar het absolute nulpunt; hun ontdekking moet daarom worden gewaardeerd als een vooruitgang op het gebied der natuurkunde, die belangrijke perspectieven heeft geopend. Dit feit werpt tevens een scherp licht op de genialiteit van den vader der Beschrijvende Meetkunde.

De man, die zich op zulke uiteenlopende gebieden der wetenschap verdienstelijk wist te maken, die bij een dergelijke eruditie een zeldzame eenvoud en nobelheid van karakter wist te bewaren — wij zullen hem op de 200e verjaardag van zijn geboortedag eerbiedig hebben te gedenken.

Utrecht, Dec. 1945.

---

[1]) Volgens Michael Faraday, Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts (Nicholson) **12** (1805), 368; **13** (1806), 233 maakte Northmore in 1805 chloorgas vloeibaar; vgl. ook: R. Winderlich, Archiv f. d. Gesch. d. Math. usw. **10** (1928), 356.

HYPATIA VAN ALEXANDRIE [1])

door

Dr. D. J. E. SCHREK.

De vierde eeuw na Chr. was in meer dan een opzicht een belangrijk tijdvak. Onder Constantijn den Groote (323—337) was het Christendom staatsgodsdienst geworden en was Byzantium, eerst onder den naam „Nieuw Rome", later onder dien van Constantinopel, hoofdstad geworden van het Romeinsche rijk. Een van Constantijns opvolgers, Julianus Apostata, die van 361 tot 363 regeerde, keerde tot het heidendom terug, dat hij, idealist en aanhanger van het Neo-platonisme, op een hooger plan wilde brengen. Onder de latere keizers zegevierde weer het Christendom; de macht van de kerkelijke waardigheidsbekleeders steeg, in zonderheid van de patriarchen te Rome, Constantinopel, Antiochië, Jeruzalem en Alexandrië. Aan het einde van de regeering van Theodosius den Groote (379—395) komt dan de verdeeling in een West-Romeinsch en een Oost-Romeinsch rijk, met resp. zijn zonen Honorius en Arcadius als keizer. Bedenkt men daarbij, dat intusschen de Groote Volksverhuizing was begonnen, dan is er inderdaad alle reden om deze eeuw belangrijk te noemen.

En dat was deze tijd ook op het terrein van wijsbegeerte en godsdienst. In de Christelijke kerk treden de figuren van zoovele kerkvaders op den voorgrond, terwijl de Grieksche wijsbegeerte haar afsluiting vindt in de Neo-platonische school. Deze had haar oorsprong in Alexandrië, haar stichter was Ammonius Saccas (omstreeks 200), maar haar grootste vertegenwoordiger is zijn leerling Plotinus (204—269). Deze hoog-ontwikkelde philosophie heeft ten slotte in den grooten strijd tegen het Christendom het onderspit moeten delven; merkwaardigerwijze vertoont ze toch ook punten van overeenkomst daarmede en heeft ze in zekeren zin den overgang van de heidensche wijsbegeerte tot het Christendom bewerkstelligd. In elk geval heeft het Neo-platonisme in het geestelijk leven van die dagen een groote beteekenis gehad.

Alexandrië, dat in het voorafgaande reeds een paar malen genoemd werd, was in de vierde eeuw een wereldstad. Het was met

[1]) Voordracht, gehouden voor het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen op 24 Oct. 1943.

zijn voortreffelijke havens een handelsplaats van den eersten rang, volgens Strabo το μέγιστον ἐμπόριον τῆς οἰκουμένης, de grootste stapelplaats van de bewoonde wereld. Gesticht in den winter van 332—'31 v. Chr. door Alexander den Groote op de landtong tusschen het Mareotische Meer en de Middellandsche Zee was het onder de regeering van Ptolemaeus I Soter (323—285) en van Ptolemaeus II Philadelphus (285—247) snel tot bloei gekomen. Een dam van zeven stadiën lengte, het Heptastadium, verbond de stad met het eilandje Pharus, waarop de beroemde vuurtoren was gebouwd, die in de Oudheid voor een der zeven wonderen van de wereld gold. Maar de genoemde koningen maakten door hun krachtdadigen en milden steun de stad tevens tot een brandpunt van wetenschap en cultuur. In het middelste deel der stad, het Bruchium, lag het koninklijk paleis met daaraan verbonden een groote bibliotheek, en een tweede bibliotheek was gevestigd in het Serapeum. Het boekenbezit omvatte eenige honderdduizenden rollen. Het Museum, door Ptolemaeus I gesticht, was een soort Academie van Wetenschappen, waar een schare geleerden zich onbelemmerd aan wetenschappelijk onderzoek kon wijden [1]). Voornamelijk werd de philologie beoefend, echter ook andere wetenschappen, zooals de anatomie, terwijl ook groote wiskundigen hier werkzaam waren: Euclides en Apollonius van Perge, later Claudius Ptolemaeus, Diophantus, Pappus en Theon.

Van dezen Theon, Theon van Alexandrië [2]), was Hypatia de dochter. De bronnen, waaruit we haar leven en werken leeren kennen, zijn niet talrijk, maar stellen toch in staat ons een vrij duidelijk beeld van haar te vormen. Een der voornaamste is het Lexicon van den Byzantijnschen lexicograaf Suidas (omstreeks 970), waarin waarschijnlijk weer een ouder bericht van Damascius, een neo-platonisch philosoof (omsteeks 500) is verwerkt [3]). Belangrijk is ook de Kerkgeschiedenis van Socrates, bijgenaamd Scholasticus, d.i. „de rechtsgeleerde", die in de 5e eeuw onder Theodosius II te Constantinopel leefde en wiens onpartijdigheid geroemd

[1]) vgl. G. Parthey. Das Alexandrinische Museum, mit einem Plane von Alexandrien (Berlin 1838).

[2]) wel te onderscheiden van zijn naamgenoot Theon van Smyrna (omstreeks 125 n. Chr.).

[3]) Suidas. Lexicon, graece et latine ed. L. Kusterns III. (Cambridge 1705) 533—534. Een moderne uitgave, die alleen den Griekschen tekst geeft, is: Suidas. Lexicon ed. Ada Adler. (Leipzig 1928—1938), aldaar IV, 644—646.

wordt [1]).Veel over Hypatia vernemen we ook uit de brieven van Synesius (omstr. 370—omstr. 415), bisschop van Ptolemais en leerling van Hypatia [2]). Tal van latere schrijvers hebben uit deze bronnen geput, o.a. Joh. Chr. Wolf in zijn werk over beroemde Grieksche vrouwen [3]), dat daarom nuttig is, omdat men er alles bijeengebracht vindt, wat bij oude schrijvers over Hypatia voorkomt, en John Toland in het derde stuk van zijn „Tetradymus [4]). Uit den nieuweren tijd zijn o.a. te noemen een artikel van Hoche [5]) en een monographie van W. A. Meyer [6]); beide zijn voor het volgende veel geraadpleegd.

Theon, Hypatia's vader, was zelf een verdienstelijk wiskundige. Hij schreef een commentaar op de Elementen van Euclides en een op het eerste (wiskundige) boek van de Almagest van Ptolemaeus, die daarom van belang is, omdat hij inzicht geeft in de wijze, waarop men destijds de vermenigvuldiging, deeling en vierkantsworteltrekking met de toen gebruikte sexagesimale breuken uitvoerde [7]).

Uit de omstandigheid, dat de werkzaamheid van Hypatia in hoofdzaak onder de regeering van keizer Arcadius (395—408) valt, kan men besluiten, dat ze omstreeks 370 geboren moet zijn. Haar eerste onderwijs, dat in de wiskunde, ontving ze van haar vader, maar al spoedig verlangde ze meer en wenschte ze *πάντα τὰ φιλόσοφα μαθήματα*, alle wijsgeerige wetenschappen, te leeren. Daar Theon lid was van het Museum heeft ze waarschijnlijk daar haar onderwijs genoten; of ze ook te Athene gestudeerd heeft is twijfelachtig.

---

1) Socrates Scholasticus. Ecclesiastica historia, graece et latine ed. R. Hussey II. (Oxford 1853) 760—761. Ook in J. P. Migne, Patrologia Graeca, Deel **67** (Parijs 1859), kol. 767—770.

2) J. P. Migne. Patrologia Graeca. Deel **66** (Parijs 1859), kol. 1321—1560.

3) Joh. Chr. Wolf. Mulierum graecarum quae oratione prosa usae sunt fragmenta et elogia; accedit catalogus foeminarum sapientia artibus scriptisve apud Graecos Romanos aliasque gentes olim illustrium. (Hamburg 1735), 72—91, 368—371.

4) John Toland. Hypatia, or the history of a most beautiful, most virtuous, most learned and every way accomplish'd lady; who was torn to pieces by the clergy of Alexandria to gratify the pride, emulation and cruelty of their Archbishop Cyril, commonly but undeservedly stil'd Saint Cyril. [Tetradymus III, 101—136]. (Londen 1720).

5) Rich. Hoche. Hypatia, die Tochter Theons. Philologus 15 (1860), 435—474.

6) W. A. Meyer. Hypatia von Alexandria. Ein Beitrag zur Geschichte des Neu-platonismus. (Heidelberg, 1886).

7) vgl. S. Günther. Geschichte der Mathematik I. (Leipzig 1908), 158—159.

Na deze grondige en veelzijdige voorbereiding vond Hypatia haar levenstaak in de leiding van de neo-platonische school te Alexandrië, waar ze alle wijsgeerige wetenschappen onderwees. Het is niet met zekerheid bekend of ze hiertoe van staatswege was aangesteld. Het programma omvatte waarschijnlijk ook wiskunde, mechanica en sterrenkunde, maar zal wel in de eerste plaats de speciaal philosophische vakken hebben betroffen. Daarbij mogen we aannemen, dat ze een aanhangster was van de Alexandrijnsche richting in het Neo-platonisme, die zich in de eerste plaats de exegese van de geschriften van Plato en Aristoteles ten doel stelde, terwijl mysticisme en de bestrijding van het Christendom op den achtergrond traden.

Maar ook buiten haar eigenlijken werkkring trad Hypatia op. Ze „wierp zich den philosophenmantel om", zooals Suidas zegt, en doceerde en discussieerde op de straten. Ze bewoog zich met groote vrijmoedigheid in allerlei gezelschap, inzonderheid ook van mannen, en wekte ieders bewondering door haar verstand en geleerdheid, welbespraaktheid en innemende manieren, zoodat ook de hoogere ambtenaren van Alexandrië haar omgang zochten en ze zelfs een enkele maal in de vergadering van den raad der stad verscheen. Daarbij worden haar schoonheid en deugdzaamheid evenzeer geroemd als haar verstandelijke begaafdheid. Gehuwd is Hypatia nooit geweest en de overlevering, dat ze de vrouw zou zijn geworden van den wijsgeer Isidorus is blijkbaar onjuist; men pleegt in dit verband ook een lofdicht aan te halen van een tijdgenoot, den epigrammendichter Palladas, die haar met het sterrenbeeld de Maagd vergelijkt. Haar afkeer van het huwelijk kwam waarschijnlijk voort uit de vrees, dat het haar in hare geliefkoosde studiën zou hebben belemmerd. Toen eenmaal een van haar leerlingen zoozeer in liefde voor haar ontbrand was, dat hij dit voor haar uitsprak, wees ze hem op zulk een drastische wijze terecht, dat — zooals Suidas zegt — de jonge man „genas en voortaan verstandiger was".

Een belangrijke plaats in het leven van Hypatia neemt de sympathieke figuur in van Synesius van Cyrene, bisschop van Ptolemais in Cyrenaeca. Hij werd geboren omstreeks 370 en moet omstreeks 415 of later, maar in elk geval vóór 430 gestorven zijn. Zijn wetenschappelijke opleiding genoot hij te Alexandrië bij Hypatia, wier toegewijde en dankbare leerling hij zijn leven lang zou blijven. Hij was rijk, van adellijke geboorte, bemind om vele voortreffelijke eigenschappen en daardoor een man van grooten invloed in zijn geboorteland, zoodat het verklaarbaar is, dat zijn

medeburgers omstreeks 410 hem tot bisschop van de Pentapolis wenschten; men zag in hem niet alleen den geestelijken leidsman, maar ook een krachtig wereldlijk hoofd en beschermer. Merkwaardigerwijze had zijn benoeming tot het ambt van bisschop plaats vóórdat Synesius tot Christen was gedoopt; ook daarna behield hij zich een eigen meening voor ten aanzien van sommige Christelijke dogmata en bleef hij Neo-platonicus, terwijl hij ook het recht op verder samenleven met zijn vrouw bedong. Dat Synesius dit alles nooit als een inconsequentie of tweespalt heeft gevoeld is wel een bewijs ervoor, hoe dicht in zijn tijd de beide machtige stroomingen elkaar reeds waren genaderd.

In de brieven van Synesius, waarvan een groot aantal bewaard zijn gebleven, wordt ook Hypatia vaak genoemd en verscheidene zijn aan haar gericht. Treffend is steeds zijn aanhankelijkheid en eerbied: hij spreekt ze aan als *δέσποινα μακαρία*, gelukzalige meesteres; in zijn 16en brief zelfs als „moeder, zuster, leermeesteres en door dat alles mijn weldoenster". Hij beklaagt zich als hij in lang geen bericht van haar heeft gehad en als leed hem treft — in de jaren 410—413 stierven achtereenvolgens alle drie zijn zoons — maakt hij haar deelgenoot van zijn klachten. Een enkele maal schrijft hij ook over wetenschappelijke questies; in dit verband komt de 15e brief straks nog ter sprake. Behalve in de brieven wordt Hypatia ook nog genoemd in een geschrift, waarin Synesius een astrolabium beschrijft, dat hij in zilver heeft laten uitvoeren naar de aanwijzingen van Hypatia — *ἡ σεβασμιωτάτη διδάσκαλος*, de zeer eerwaardige leermeesteres, heet ze hier — en dat hij een zekeren Paconius ten geschenke wil geven [1]).

Tragisch is de dood van Hypatia, die het slachtoffer is geworden van een conflict, waarin ze niet rechtstreeks was betrokken. De patriarch Cyrillus, die sedert 412 deze waardigheid bekleedde, was in botsing gekomen met den Romeinschen stadhouder Orestes, die als vertegenwoordiger van den keizer niet kon dulden, dat Cyrillus steeds meer macht aan zich trok. Verschillende gebeurtenissen brachten de toch al roerige bevolking nog meer in beweging; daarbij bestond de partij van Cyrillus uit de monniken van de kloosters op de naburige bergen van Nitria en uit de zoogen. parabolanen, oorspronkelijk een liefdadige corporatie, maar die langzamerhand tot een invloedrijke partij was geworden, welke vaak onrust verwekte.

1) Migne, t.a.p. Deel **66**, kol. 1577—1588, in het bijzonder kol. 1583—1584.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

21e JAARGANG 1945/46
(de jaargang 1944/45 is overgeslagen)

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN



Opname Juni 1946

PROF. DR S. C. VAN VEEN,
geboren 8 Juni 1896 te Rotterdam. Leraar aan de Chr. H.B.S. te Dordrecht 1921; hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft 1946.

Socrates nu vertelt, dat men het volk in den waan had gebracht, dat Hypatia, die met Orestes bevriend was, degene was die een verzoening van Cyrillus en Orestes in den weg stond. Het volk, opgeruid door een der lagere geestelijken, een zekeren Petrus den voorlezer, viel Hypatia op straat aan, sleurde haar van haar wagen, rukte haar de kleederen af en bracht ze naar het Cesareum, een kerk, die dichtbij de zee was gelegen. Daar werd ze op gruwelijke wijze gedood met scherven (ὀστράκοις, zegt Socrates, welk woord echter volgens sommigen in de oorspronkelijke beteekenis van oesterschelp moet worden genomen) en haar lichaam werd uiteengereten. Dit geschiedde in Maart 415.

Over de schuldvraag in deze tragedie is veel geschreven. Van de zijde van de Kerk is steeds weer betoogd, dat de medeplichtigheid van Cyrillus aan den moord nooit is bewezen. Reeds in het midden der 18e eeuw schreef Pater Desmolets zijn „Dissertation sur Hypacie où l'on justifie S. Cyrille sur la mort de cette sçavante"; eveneens wordt Cyrillus verdedigd door Wernsdorff in een verhandeling [1]), die algemeen belangrijker wordt geacht. Ten onzent wijdde een veertigtal jaren geleden Dr. L. J. Sicking aan deze questie een uitvoerige studie [2]), die ook overigens lezenswaard is. Over het algemeen meent men echter, dat Cyrillus, zoo hij al den moord niet bepaald heeft bevolen, toch wel de aanstichter is geweest. De Protestantsche theoloog Gottfried Arnold (1666—1714), die als een objectief geschiedschrijver bekend staat, verwijt Cyrillus een reeks van ondeugden en misdaden [3]) en de Engelsche historicus Edward Gibbon (1737—1794) meent: „the murder of Hypatia has imprinted an indelible stain on the character and religion of Cyril of Alexandria" [4]). Trouwens ook Socrates Scholasticus, zelf Christen, is van deze meening en zegt: „Geen geringe schande bracht deze dood over Cyrillus en de Kerk van Alexandrië, want geheel vreemd zijn moord en doodslag dengenen, die het met Christus houden".

---

1) Wernsdorff, Dissertationes academicae IV de Hypatia, philosopha Alexandrina: (Vitembergae 1747—'48).

2) L. J. Sicking. De onschuld van den H. Cyrillus van Alexandrië aan den moord op Hypatia, in het maandschrift „de Katholiek", **129** (1906[I]), **130** (1906[II]), **132** (1907[II]), **133** (1908[I]) en **135** (1909[I]).

3) Gottfried Arnold. Unpartheyische Kirchen- und Ketzerhistorie. (Frankfort a. M. 1699—1700). Erster Theil, 5. Buch, Cap. III, § 10—11, blz. 224.

4) Edw. Gibbon. The decline and fall of the Roman Empire V, (Everyman's Library 1922—'28), 12—15.

Over de werken, die Hypatia geschreven heeft, is heel weinig bekend. Alleen Suidas spreekt erover; hij noemt *ὑπόμνημα εἰ Διόφαντον, τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα, εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα*. Dit zijn drie werken, waarvan het eerste een commentaar (*ὑπόμνημα*) is op Diophantus en het laatste op de Kegelsneden van Apollonius van Perge. De historici hebben echter reden om aan te nemen, dat voor den tweeden titel eveneens het woordje *εἰς* moet worden gelezen, zoodat ook dit werk een commentaar zou zijn en wel, naar men meent, op den *κανὼν ἀστρονομικός* van Ptolemaeus. Van al deze geschriften is tot dusver niets gevonden, zoodat men niet weet of ze nog bestaan.

Thans nog een enkel woord over een uitvinding, die men dikwijls — hoewel ten onrechte — aan Hypatia heeft toegeschreven, waarbij men zich beriep op den 15en brief van Synesius; bedoeld is de uitvinding van den areometer. Zoo schrijft b.v. onze landgenoot van Musschenbroek (1692—1761): „Hygrometrum sub fine quarti saeculi dicitur inventum ab Hypatia, Theonis filia, ut ex Synesii Cyrenaei Epistola XV colligitur" [1]), waarbij „hygrometrum" een der vele namen is, waarmede in den loop der eeuwen de areometer is aangeduid.

Wat staat er dan wel in dien 15en brief van Synesius? Hij schrijft: „Ik ben er zoo ongelukkig aan toe, dat ik een hydroscopium noodig heb. Wees zoo goed er een voor mij te laten maken en te koopen. Het is een buis, die de gedaante van een cylinder heeft, van de grootte en vorm van een fluit. Deze heeft in de lengte een rechte lijn met insnijdingen, waarmee we het gewicht van het water leeren kennen. Want aan het einde is een kegel aangebracht zoodanig, dat beider grondvlakken samenvallen, n.l. dat van den kegel en van de buis. Dit nu is wat men een baryllium noemt. Wanneer ge de buis in het water zet, zal zij rechtop blijven staan, zoodat ge de insnijdingen erop gemakkelijk kunt tellen en daaruit zult ge het gewicht leeren kennen."

Men heeft langen tijd niet geweten, welk instrument hier bedoeld wordt. Reeds Petavius [2]), die in 1640 de gezamenlijke geschriften van Synesius uitgaf, verklaarde met deze plaats geen raad te weten. Men heeft er merkwaardigerwijze een wateruurwerk (clepsydra) in gezien, ook wel een toestel voor waterpassen, dat bij Vitruvius onder den naam van chorobates voorkomt. De

---

1) Petrus van Musschenbroek. Introductio ad Philosophiam Naturalem II, (Leiden 1762), § 1384, blz. 522.
2) de Jezuietenpater Denys Petau (1583—1652).

juiste verklaring is gegeven door den grooten Franschen wiskundige Pierre de Fermat (1601—1665), die aantoonde, dat hier van een *areometer* sprake is [1].

Het is nu wel duidelijk, dat Hypatia bezwaarlijk de uitvindster kan zijn, daar immers Synesius haar uitvoerig aangeeft, hoe het instrument er uitziet. Er is echter nog een andere meer afdoende reden. In de Annalen der Physik van 1800 heeft een anonymus erop gewezen, dat de areometer reeds nauwkeurig wordt beschreven in een leerdicht, het Carmen de Ponderibus, dat zeker wel drie eeuwen vóór Hypatia is vervaardigd [2]. Het werd vroeger veelal aan Priscianus (omstreeks 500, te Constantinopel) toegeschreven, maar men is het er thans wel over eens, dat deze de schrijver niet kan zijn; als zoodanig wordt nu meestal beschouwd Rhemnius Fannius Palaemon, die veel vroeger, omstreeks de regeering van keizer Claudius (41—54) leefde [3]. Het gedicht is ook overigens merkwaardig, omdat het een nauwkeurige beschrijving geeft van de destijds gebruikte maten en gewichten [4].

Vraagt men nog, waarvoor dan Synesius, als hij ziek was, een hydroscopium noodig had, dan vindt men gewoonlijk, dat dit was om de zuiverheid van zijn drinkwater te onderzoeken [5]. Het lijkt onbegrijpelijk, dat men met een dergelijk ruw instrument, dat niet van een dunnen steel was voorzien, zulke fijne metingen zou kunnen uitvoeren. Vast staat intusschen, dat soortgelijke beschouwingen in de Oudheid meer voorkomen; zoo leert het zooeven genoemde Carmen de Ponderibus (vs. 98—101):

„namque nec errantes undis labentibus amnes,
nec mersi puteis latices aut fonte perenni
manantes par pondus habent, non denique vina
quae campi aut colles nuperve aut ante tulere."

(want ook hebben niet zwervende stroomen met vallend water, noch

1) Observation de Monsieur de Fermat sur Synésius, in het voorbericht van de Varia opera mathematica, door Samuel de Fermat na zijns vaders dood uitgegeven (Toulouse 1679). Ook in: Oeuvres de Fermat, I (Parijs 1891), 362—365.

2) Wer hat das Areometer erfunden? Annalen der Physik (Gilbert's Annalen **6** (1800), 125—128.

3) vergelijk ook Joh. Beckmann. Beyträge zur Geschichte der Erfindungen. (Leipzig 1786—1805), Vierter Theil, Art. 5, blz. 242—271.

4) Metrologicorum scriptorum reliquiae, colligit . . . edidit F. Hulfsch. Vol. II. Scriptores Romani. (Leipzig, Teubner, 1866), 24—31. Het gedicht zelve komt voor op bl. 88—98, het gedeelte over den areometer (vs. 103—121) op blz. 94—95.

5) zoo b.v. Joh. Chr. Wolf t.a.p., ad aquarum puritatem cognoscendam.

water, dat in putten staat, of uitstroomt uit een duurzame bron, gelijk [soortelijk] gewicht, en ook ten slotte niet wijn, die in de vlakte of op de heuvelen is gekweekt, die jong of oud is).

En in het groote geneeskundige werk van Celsus (in de eerste eeuw na Chr.) vindt men soortgelijke opmerkingen [1]).

Keeren we na deze uitweiding tot ons onderwerp terug. Het behoeft geen verwondering te wekken, dat het leven en vooral de gruwelijke dood van Hypatia de aandacht van dichters en romanschrijvers heeft getrokken. Hierboven werd reeds het epigram van Hypatia's tijdgenoot Palladas vermeld. Onder de andere dichters die Hypatia hebben bezongen is het meest bekend Leconte de Lisle (1818—1894). In zijn Poèmes Antiques (1852) is zij tweemaal het onderwerp: „Hypatie et Cyrille" geeft een uitvoerigen dialoog tusschen deze twee figuren, die in een zoo verschillende gedachtenwereld leven en wier onderhoud dan ook zonder resultaat blijft, terwijl „Hypatie" haar eert als laatste verdedigster van het ondergaande heidendom:

Ô vierge, qui, d'un pan de ta robe pieuse,
Couvris la tombe auguste où s'endormaient tes Dieux,
De leur culte éclipsé prêtresse harmonieuse,
Chaste et dernier rayon détaché de leurs cieux!

Algemeen bekend is voorts de roman van Kingsley [2]), die in 1853 verscheen onder den titel: Hypatia, or New Foes with an Old Face. In dit werk, de vrucht van veel studie, laat Kingsley een jongen monnik, Philammon, die uit het zuiden van Egypte naar Alexandrië komt, de beroeringen in die wereldstad meemaken, in welke hij dan steeds meer betrokken geraakt. In Engeland gaf het boek aanstoot bij een deel van het publiek; men beweert zelfs, dat een eere-doctoraat in de rechten, waarvoor de Prins-Gemaal Albert den schrijver had willen voordragen, hem daardoor ontgaan is [3]). In andere landen, vooral in Duitschland, werd het boek meer gewaardeerd; ook in ons land trok het blijkbaar de aandacht, want

---

[1]) Celsus. De medicina, with an English translation by W. G. Spencer. I. (Loeb Classical Library no. 292, London 1935), 198. (Liber 2. Cap. 18).

[2]) Charles Kingsley (1819—1875) was een Anglicaansch geestelijke, later hoogleeraar in de nieuwe geschiedenis te Cambridge.

[3]) vgl. Hans von Schubert. Hypatia von Alexandrien in Wahrheit und Dichtung. Preussische Jahrbücher **124** (1906), 42—60.

reeds in 1854 verscheen een Nederlandsche vertaling [1]. Een andere bewerking in romanvorm van Hypatia's leven gaf de Duitsche schrijver en philosoof Fritz Mauthner (1849—1923) onder den titel: Hypatia, Roman aus dem Altertum (1892).

Hoe moet ten slotte ons oordeel over Hypatia luiden? Ze was de eerste vrouw, die in de geschiedenis der wiskunde een plaats van beteekenis innam, en deze omstandigheid, èn haar tragische dood hebben vooral de aandacht op haar gevestigd. Aldus oordeelt b.v. de Amerikaansche hoogleeraar Smith, die spreekt van een „unduly exalted place in history" [2], terwijl zijn landgenoot Sarton van ongeveer dezelfde meening is: „The murder of Hypatia is the chief source of her immortality" [3]. Toch is ongetwijfeld Hypatia een belangrijke figuur geweest. Dat het vooral vrijdenkers waren — Toland, Gibbon, Mauthner — die haar hebben bewonderd en als martelares voor hun zaak hebben voorgesteld, kan ons niet verbazen. Maar toch, ook de kerkhistoricus Socrates, de Christen-socialist Kingsley en de theoloog Arnold, zij allen hebben met liefde en bewondering over haar geschreven. En hoe men ook over haar denken moge, hierover zijn allen het eens: ze was een der laatste vertegenwoordigers van de ten ondergaande cultuur der Oudheid en haar dood in 415 was, zooals Sarton in zijn aangehaald werk het uitdrukt: „a date in the history of thought."

Utrecht, Aug. 1943.

---

1) Ch. Kingsley. Hypatia, of Nieuwe vijanden in een oude gedaante. Naar het Engelsch door W. J. Mensing ('s Gravenhage 1854) (2 dln.).

2) D. E. Smith. History of Mathematics I (Boston 1923), 137.

3) G. Sarton. Introduction to the history of science I (Baltimore 1927), 386.

OVER DE DIDACTIEK VAN DE INTEGRAALREKENING BIJ HET VOORBEREIDEND HOGER EN MIDDELBAAR ONDERWIJS

door

Dr. L. N. H. BUNT.

1. In „Mathematik in Erziehung und Unterricht" [1]) worden enkele opmerkingen gemaakt over het verschil in belangrijkheid, dat er bestaat tussen het onderwijs aan de middelbare school in de differentiaalrekening en dat in de integraalrekening. Volgens de auteurs van dit werk dient het onderwijs in de differentiaalrekening om een strengere behandeling, en tegelijkertijd een behandeling van een centraal gezichtspunt uit, te kunnen geven van enkele onderwerpen, die op verschillende plaatsen bij het wiskundeonderwijs ter sprake komen, zoals uiterste waarden, de vergelijking van een raaklijn aan een gegeven kromme, de benaderingsmethode van Newton voor de wortels van een hogere-machtsvergelijking, oneindige reeksen; zij zouden hierbij bovendien nog hebben kunnen opnoemen de foutenbepaling door middel van de formule $\Delta\, y \approx f'(x) . \Delta\, x$, welke eveneens op het programma van de Duitsche middelbare scholen voorkomt. Bij de integraalrekening daarentegen zou het anders gesteld zijn; er zijn niet zoveel gebieden te vinden, die ontlast kunnen worden door invoering van dit onderdeel der infinitesimaalrekening. Oppervlakken en inhouden worden reeds in lagere klassen behandeld, en als hierbij het limietbegrip een rol gaat spelen behelpt men zich met succes door toepassing van methoden als die van Archimedes en met de stelling van Cavalieri. Alleen voor toepassingen op de natuurkunde komen eigenlijk de beschouwingen uit de integraalrekening van pas.

Het is duidelijk, dat deze zienswijze niet van toepassing is op het Nederlandse onderwijs. Na de behandeling van de differentiaalrekening kunnen natuurlijk de uiterste waarden op een eleganter manier worden bepaald, en in de mechanica passen enkele moderne leerboeken terecht de differentiaalrekening toe bij de begrippen snelheid en versnelling; maar de benaderingsmethode van Newton, oneindige reeksen, foutenbepaling, en het opstellen van de vergelijking van een raaklijn komen practisch niet voor op

[1]) W. Lietzmann und U. Graf, Mathematik in Erziehung und Unterricht II (Leipzig, Quelle und Meyer, 1941), 221.

onze programma's. En ook wat de integraalrekening betreft, liggen bij ons de zaken anders; alleen de oppervlakte van de cirkel moeten wij met „elementaire" methoden afleiden, maar de berekening van de inhouden in de stereometrie behoeft pas op een tijdstip aan de orde te komen, waarop zij als toepassing van de inmiddels behandelde hoofdstelling van de integraalrekening [1]) kan worden gegeven.

Op grond hiervan kunnen we zeggen, dat te onzent de differentiaalrekening, wat haar belangrijkheid voor het v.h. en m.o. betreft, niet een dergelijke overheersende positie inneemt t.o.v. de integraalrekening, ja zelfs, dat deze laatste als minstens even gewichtig dient te worden beschouwd.

2. Wanneer wij er ons wat nauwkeuriger rekenschap van willen geven in welk opzicht nu eigenlijk de integraalrekening voor het v.h. en m.o. van belang moet worden geacht, kunnen wij ons bijv. bedienen van de vier motieven, die Prof. Bottema in zijn inaugurele rede [2]) heeft uiteengezet, motieven, die kunnen worden aangevoerd om de wenselijkheid van onderwijs in wiskunde in het algemeen of in een bepaald onderdeel der wiskunde aan te tonen. De vier opgesomde motieven zijn: *a.* de wiskunde om haar zelf; *b.* de wiskunde voor natuurwetenschap en techniek; *c.* de vormende; *d.* de selecterende waarde.

Wat motief *a.* betreft, de integraalrekening voor de wiskunde zelf, kan men het van belang achten, om naast de bespreking van het differentiatieproces ook de omgekeerde bewerking, het integreren, in de leergang op te nemen ten einde tot een fraai afgerond geheel te komen. Nu moge dit argument aantrekkelijk zijn voor den wiskundige, of het ook voor de leerlingen voldoende reden zal zijn om de behandeling van dit onderdeel als op afdoende wijze gerechtvaardigd te zien, wagen wij te betwijfelen. Een krachtiger motief voor de beoefening van de integraalrekening zal er bij hen in werking treden, wanneer zij ervaren op welk een vlotte en eenvoudige manier de inhoudsformules uit de stereometrie kunnen worden afgeleid. Natuurlijk moeten wij geen *definitie* van de inhoud gaan geven door middel van een bepaalde integraal; dat is voor onze leerlingen onverteerbaar. Naar mijn mening wordt de grens bereikt van datgene, wat voor onze leerlingen in dit opzicht nog geschikt is, door de overigens interessante wijze van behandeling der inhouden door

---

[1]) Onder „hoofdstelling van de integraalrekening" verstaan wij in deze bijdrage de stelling: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

[2]) Prof. Dr. O. Bottema, De dienst der wiskunde; afgedrukt in Euclides, 18 (1941/'42), 129—146.

Vredenduin[1]). Hij definieert de inhoud van een lichaam als „een getal, dat wij aan dat lichaam toekennen onder inachtneming van het volgende drieledige voorschrift:

1°. aan een kubus met ribben 1 voegen we het getal 1 toe,

2°. aan congruente lichamen voegen we gelijke getallen toe,

3°. bestaat een lichaam uit twee delen A en B en zijn aan A en B reeds de getallen a en b toegevoegd, dan voegen we aan het gehele lichaam het getal $a + b$ toe."

Vervolgens wordt aangetoond, dat wanneer men een x-as aanneemt en de oppervlakten van doorsneden loodrecht hierop aanduidt met D, de bepaalde integraal $\int_a^b Ddx$ een getal is, dat aan dit voorschrift voldoet.

Dat deze redenering niet volledig is, wordt door den schrijver zelf opgemerkt, waar hij meedeelt niet te zullen bewijzen, dat de keuze van de x-as geen invloed heeft op de uitkomst. Maar, aangenomen dat deze integraal onafhankelijk is van de keuze van de x-as, dan is toch nog niet duidelijk, waarom er geen getallen, op andere wijze gevonden dan als uitkomst van een integraal, aan het voorschrift voldoen en dus als inhoud van een lichaam kunnen worden aangemerkt, waardoor sommige lichamen meer dan één inhoud zouden hebben. Is dit misschien een van de onuitgesproken oorzaken van de moeilijkheden, die de axiomatische invoering van het begrip „inhoud" met zich brengt? Hoe het zij, voor beginners in de stereometrie levert in ieder geval diè wijze van behandeling de minste moeilijkheden op, waarbij men wel de integraalrekening gebruikt, maar het begrip „inhoud" als intuitief bekend opvat. Bij deze „ouderwetse" manier moet dan evenwel worden begonnen met de inhoudsformules af te leiden voor een recht prisma en een rechte cylinder alvorens de formule $\int_a^b Ddx$ te kunnen toepassen, wat natuurlijk enige tijd neemt; en er moet van de methode van Vredenduin gezegd worden, dat die dit bezwaar op de meest afdoende wijze uit de weg ruimt.

De bij motief b. ter sprake komende toepassingen van de integraalrekening op het gebied van de mechanica en de natuurkunde zijn bekend: de arbeid als wegintegraal, zwaartepunt, druk van een vloeistof op een zijwand, potentiaal in het electrisch veld van een bolvormige geleider, arbeidsvermogen van een geladen geleider,

[1]) Dr. P. G. J. Vredenduin, Stereometrie (2e druk bij Wolters, Groningen.) Hoofdstuk 13.

veldsterkte; hierbij beperk ik mij tot het noemen van datgene, wat voor een leerling gedurende zijn schooltijd van belang kan zijn. Er is reeds zo dikwijls op gewezen, dat de methoden van de integraalrekening verre de voorkeur verdienen boven de zg. elementaire manieren en maniertjes, dat we hierbij niet verder behoeven stil te staan.

In hoeverre het derde motief, de vormende waarde, een rol kan spelen bij de beoordeling van de wenselijkheid van onderwijs in de integraalrekening, dus in hoeverre de vormende waarde van onderwijs in de integraalrekening groter of kleiner is dan die van het onderwijs in enig ander onderdeel van de wiskunde, zal wel niet zo gemakkelijk zijn uit te maken. Om één in dit verband belangrijk punt te noemen: het functionele denken zal ongetwijfeld minstens evenzeer bevorderd worden door het onderwijs in de methoden van de integraalrekening, als door onderwijs in een willekeurig ander vak.

Het selecterend vermogen tenslotte van de integraalrekening lijkt me niet groot, en ik ben geneigd om te zeggen: gelukkig!, laat die selectie nu ook maar eens door andere vakken worden uitgeoefend. Verreweg de meeste leerlingen zullen ons dankbaar zijn voor elke wiskundeles, waarin ze het besef hebben, dat ze nu eens niet worden geselecteerd. Natuurlijk is het hier, net zo goed als in elk ander onderdeel van de wiskunde, gewenst, dat de leerlingen zich de begrippen en methoden door eigen arbeid trachten te verwerven; dit behoeft hier echter niet te geschieden door het stellen van vragen, die door een aanzienlijk deel van de klas niet zonder hulp kunnen worden beantwoord. Zoals zal blijken, kunnen het integraalbegrip en de hoofdstelling van de integraalrekening (evenals trouwens het begrip afgeleide functie en enkele stellingen uit de differentiaalrekening) in hoge mate veraanschouwelijkt worden door het doen tekenen van grafieken, een wijze van behandelen, die voor het allergrootste deel van onze leerlingen weinig moeilijkheden oplevert.

Wanneer wij het onder *a, b, c* en *d* besprokene resumeren, dan kunnen we zeggen, dat de behandeling van de integraalrekening in hoofdzaak gemotiveerd wordt door de vele belangrijke toepassingen van de bepaalde integraal, aan de ene kant op het gebied van de wiskunde zelf, aan de andere kant op het gebied van de natuurkunde, toepassingen dus van de hoofdstelling der integraalrekening: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, en wel in die gedaante, waarin de beide grenzen constant zijn.

3. Onze conclusie, dat het belang van de integraalrekening voor

het v.h. en m.o. niet in de eerste plaats gezocht moet worden in het verwerven van kennis omtrent een afgerond stuk wiskunde-theorie, maar veeleer in de mogelijkheden, die er liggen in het toepassen van de hoofdstelling, brengt een nadere overweging mede aangaande de wijze, waarop deze hoofdstelling bij onze leerlingen dient te worden geïntroduceerd. Bij het gebruikelijke bewijs hiervan, dat we in § 8 aan een uitvoerige bespreking zullen onderwerpen, beperkt men zich niet tot de behandeling van de bepaalde integraal in de gedaante $\int_a^b f(x)dx$ met twee constante grenzen, maar men begint met de bepaalde integraal in te voeren in de gedaante $\int_a^x f(x)dx$, dus met veranderlijke bovengrens. En uit een theoretisch-wiskundig oogpunt bezien bevredigt dit in hoge mate, omdat hier het integreren als de omgekeerde bewerking van het differentiëren te voorschijn komt; immers, de bepaalde integraal in de gedaante $\int_a^x f(x)dx$, welke in het bewijs van de hoofdstelling aanschouwelijk geïnterpreteerd wordt door middel van een veranderlijk oppervlak, is juist zo'n functie, die bij differentiatie weer de oorspronkelijke functie $f(x)$ voortbrengt. Wanneer evenwel, zoals we boven zagen, de theorie van de integraalrekening alleen behoeft te bestaan uit de afleiding van de hoofdstelling in die gedaante, waarin ze betrekking heeft op bepaalde integralen met twee *constante* grenzen, ligt het voor de hand om ons af te vragen of het ook aanbeveling verdient om het gebruikelijke, voor de leerlingen tamelijk lastige, bewijs hiervan door een ander te vervangen, dat weliswaar het omgekeerde karakter van het integratieproces niet doet uitkomen, maar dat, juist omdat het de omweg over de bepaalde integraal in de gedaante $\int_a^x f(x)dx$ niet maakt, het voordeel zal hebben van groter kortheid.

Zelfs zou een nog veel radicaler oplossing mogelijk zijn, nl. dat men alleen die speciale gevallen van de hoofdstelling afleidt, die op andere plaatsen bij het onderwijs een rol zullen spelen, dat men de hoofdstelling in haar algemene vorm echter niet behandelt en dus de integraalrekening onafhankelijk van de differentiaalrekening opbouwt. Ik zal in deze laatste richting geen voorstel doen, maar er beneden (nl. in § 5) nog wel even op terugkomen.

4. Ten einde tot een antwoord te komen op de in § 3 gestelde vraag, willen wij eerst in het kort beschrijven, hoe in onze schoolboeken de behandeling van de differentiaal- en integraalrekening plaats vindt.

Men begint met een behandeling van de limieten van varianten en functies, als voorbereiding voor de daarop volgende bespreking van het differentiaalquotient. Dit laatste wordt ingevoerd als de limiet van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wanneer Δx tot nul nadert, toegelicht door een om één van zijn snijpunten met de bijbehorende grafiek draaiende snijlijn, en eventueel ook nog door een kinematische beschouwing. Nadat het differentiaalquotient voor enkele gevallen is uitgerekend ten einde een zekere vertrouwdheid met dit begrip en met het begrip „afgeleide functie van een gegeven functie" te doen krijgen, worden de eigenschappen bewezen omtrent de afgeleide van een constante, van de som, het verschil, het product en het quotient van twee functies, van een macht, van sin x en cos x. Dan komt soms nog de kettingregel en iets over extremen en buigpunten, waarmee de differentiaalrekening afgehandeld is.

De integraalrekening wordt meestal begonnen met het invoeren van het begrip „primitieve functie" of „integraalfunctie" of „onbepaalde integraal" van een gegeven functie $f(x)$. Hieronder verstaat men een willekeurige functie, die $f(x)$ tot afgeleide functie heeft. Hieromtrent merkt men op, dat indien $F(x)$ een primitieve functie is van $f(x)$, ook $F(x) + C$ een primitieve functie is van $f(x)$. Een belangrijker rol speelt evenwel het omgekeerde: $F(x) + C$ omvat alle primitieve functies van $f(x)$. Men bewijst verder, dat de oppervlakte van de figuur, ingesloten door de x-as, een deel der grafiek van de functie $f(x)$, en de ordinaten in de punten met abscissen a en x van de x-as opgericht, welke oppervlakte een functie is van x en voor te stellen is door O_a^x, een primitieve functie is van $f(x)$. Heeft men nu de beschikking over één primitieve functie $F(x)$ van $f(x)$, dan is de oppervlakte van de figuur uit te rekenen. Immers, voor een zekere waarde van de constante zal nu, volgens de bovengenoemde stelling, O_a^x zijn voor te stellen door $F(x) + C$. Aangezien verder $O_a^a = 0$, volgt hieruit $C = - F(a)$, zodat O_a^x, gelijk is aan $F(x) - F(a)$. Daarna voert men het begrip „bepaalde integraal" in als $\lim_{\Delta x \to 0} \Sigma f(x) \Delta x$, met notatie $\int_a^b f(x)dx$, en licht toe, dat deze limiet de bedoelde oppervlakte voorstelt. Hieruit volgt dan de hoofdstelling.

5. De hier geschetste inleiding in de differentiaal- en integraalrekening wordt niet door iedereen de meest geschikte geacht. In het bijzonder vinden sommigen [1]) het begrip „differentiaalquotient", waarvan de uiteenzetting en de toelichting zo'n belangrijke plaats inneemt bij de aanvang van de differentiaalrekening, een te moeilijk begrip voor beginners in deze materie. Zij zijn integendeel van mening, dat het begrip „oppervlakte van een kromlijnige figuur" voor onze leerlingen gemakkelijker te verwerken is dan dat van „helling van een raaklijn aan een grafiek". Ook de historische ontwikkeling van de infinitesimaalrekening wijst in deze richting: de aanvang van de integraalrekening ligt ongeveer 2000 jaar vóór die van de differentiaalrekening. Men pleit dan ook wel eens voor een radicale omzetting van het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening: niet eerst het differentiaalquotient behandelen en daarna de integraal, maar omgekeerd. Het verst is Reinhardt in deze richting gegaan; in zijn Methodische Einführung in die höhere Mathematik [2]) begint hij met een inleiding te geven in de integraalrekening. Hij berekent op „elementaire" manier de bepaalde integralen tussen twee constante grenzen van de functies x, x^2, x^n, $\sin x$, $\cos x$, en leidt vervolgens een belangrijk deel van de integraalrekening af zonder het woord „afgeleide" ook maar te noemen. Daarna pas wordt ook dit begrip ingevoerd terwijl het verband tussen de differentiaal- en integraalrekening wordt aangegeven door middel van de hoofdstelling in de volgende vorm: de functie $\int_a^x f(x)\,dx$ heeft tot afgeleide de functie $f(x)$. Tenslotte worden, door middel hiervan, van de bovengenoemde eenvoudige functies de afgeleide functies gevonden en worden de gebruikelijke stellingen van de differentiaalrekening afgeleid uit die van de integraalrekening.

Wanneer een dergelijke wijze van behandeling voor het v.h. en m.o. werkelijk uitvoerbaar was, zou ze ongetwijfeld een groot voordeel met zich brengen. Ik ben weliswaar niet van mening, dat het begrip „differentiaalquotient" als te moeilijk voor onze leerlingen dient te worden beschouwd; mijn ervaring is integendeel, dat bij een rustig opgezette en natuurlijk tot in de kleinigheden uitgewerkte didactiek de hierbij optredende limietovergang geen grotere moeilijkheden meebrengt dan die bij het integratieproces. Maar ik acht het wel een voordeel, dat bij deze gang van zaken, waarbij reeds in het

[1]) O.a. K. Reinhardt in: Zur Behandlung der Integralrechnung auf der Schule; Zeitschrift für math. u. naturw. Unterr., **65** (1934) 361—366.
[2]) Leipzig, Teubner, 1934.

beginstadium de mogelijkheid geopend wordt om toepassingen van de integraalrekening te geven, de leerlingen al direct zouden kunnen zien, wat er alzo met de infinitesimale methoden kan worden bereikt, het middel om bij hen belangstelling voor dit nieuwe onderwerp te wekken. Evenwel, deze manier om de differentiaal- en integraalrekening op te bouwen, moge op zich zelf een zeer interessante afwijking zijn van de gebruikelijke gang van zaken, en de lezer kan zich daarvan overtuigen door het genoemde werk van Reinhardt ter hand te nemen, een geschikte methode voor ons onderwijs lijkt ze mij niet. Het is nl. wel mogelijk om, uitgaande van de resultaten der integraalrekening tezamen met de hoofdstelling in de genoemde vorm, op eenvoudige wijze de stellingen uit de differentiaalrekening af te leiden, die betrekking hebben op de afgeleide van de som van twee functies en op het product van een functie en een constant getal; maar de bewijzen van de stellingen voor de afgeleide van het product van twee functies en voor de samengestelde functie zijn voor ons doel volkomen ongeschikt. Daarbij komt, dat de bij ons gebruikelijke bewijzen voor deze stellingen volstrekt niet zo misplaatst zijn, omdat ze een goede oefening bieden in het werken met het begrip „afgeleide".

Nu zou men zich nog op het standpunt kunnen plaatsen, dat men wel de methode van Reinhardt volgt, maar de laatste stap niet doet; dat men dus niet probeert om de stellingen van de differentiaalrekening af te leiden uit die van de integraalrekening, maar ze op de gebruikelijke manier bewijst [1]). In het laatste geval zou de hoofdstelling slechts een theoretisch nut hebben en voor de practijk van het onderwijs verder overbodig zijn. Echter zou er op die manier wel een zeer onbevredigend geheel voor den dag komen: in de eerste plaats moeten er bij de zgn. elementaire integratie van functies als x^n en sin x kunstgrepen worden toegepast, terwijl van een gemeenschappelijk gezichtspunt geen sprake is; in de tweede plaats ontbreekt ieder verband tussen de differentiaal- en de integraalrekening. Bij dit bezwaar voegt zich nog een practisch bezwaar: wanneer in de vierde klas van de h.b.s. de differentiaalrekening tot later wordt uitgesteld, komt men in moeilijkheden bij de mechanica, in welk vak men met integraalrekening niet gebaat is, maar wel de differentiaalrekening nodig heeft, en wel direct in het begin.

[1]) Dit is, naar ik vermoed, de gang van zaken, die Reinhardt voor ogen staat in zijn bovengenoemd artikel. Hij stelt hierin een uitvoeriger verhandeling over dit onderwerp in uitzicht, welke echter, bij mijn weten, niet verschenen is.

Leek mij dus de door Reinhardt voorgestelde gang van zaken niet nodig, omdat ik zijn bezwaar tegen de moeilijkheid van het differentiaalquotient niet deelde, om de hierboven genoemde redenen lijkt mij zijn methode ook niet wenselijk.

6. Hoewel de didactiek van de differentiaalrekening thans niet aan de orde is, willen we toch, in verband met hetgeen volgt, eerst even zien in hoeverre het onderwijs in dit vak, meer dan tot nog toe gebruikelijk is, kan worden veraanschouwelijkt door het tekenen van grafieken.

De afgeleide $y_0' = f'(x_0)$ van de functie $y = f(x)$ voor een zekere waarde x_0 van x wordt in de figuur geïnterpreteerd als de tangens van de hoek, welke de raaklijn, in het punt P met abscis x_0 aan de grafiek $y = f(x)$ getrokken, maakt met de positieve x-richting (fig. 1). Deze tangens wordt verkregen als limiet van de tangens van de hoek, welke een om P draaiende snijlijn PQ van de grafiek maakt met de positieve x-richting. Door het optreden van al die tangenten ligt het voor de hand om de goniometrische cirkel met middelpunt P en straal = 1 te tekenen met de verticale raaklijn, die de cirkel aan de rechterkant raakt. Hiervan wordt door de bewegende snijlijn een stuk afgesneden gelijk aan de tangens van de hoek, welke die lijn maakt met de x-as; zo is AQ′ = tg ∠ APQ. Laat men nu in het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de noemer tot nul naderen, dan beweegt zich het punt Q langs de kromme naar P toe, terwijl de projectie Q′ van Q op de lijn der tangenten in het algemeen tot een zekere grensstand nadert. We beschouwen verder een punt R, aan de andere kant van P op de grafiek gelegen, en ook dit punt R laten we tot P naderen, terwijl het steeds geprojecteerd wordt op de verticale raaklijn. Men ziet hierbij de projectie R′ van R zich eveneens op de raaklijn bewegen en het normale geval is, dat Q′ en R′ tot dezelfde grensstand naderen. Noemt men deze gemeenschappelijke limietstand S, dan levert AS de limiet van het differentiequotient, d.w.z. de afgeleide.

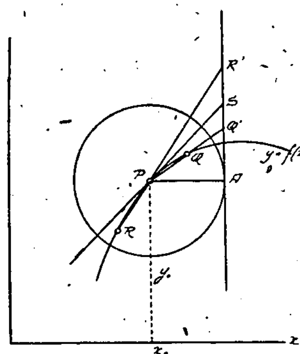


Fig. 1.

Waar wij ons in deze bijdrage willen beperken tot de integraalrekening, is het hier niet de plaats om nader in te gaan op de voordelen, die er aan deze veraanschouwelijking van het differentiaalquotient verbonden zijn. Men kan dit overigens uiteengezet

vinden in een artikel van Harnack over de didactiek van de differentiaal- en integraalrekening [1]). Wel willen wij haar nu gaan gebruiken om de grafiek te tekenen van de afgeleide functie ener gegeven functie. Hierbij zal het niet nodig zijn, dat van deze laatste functie de analytische vorm bekend is; het is voldoende, wanneer de functie gegeven is door middel van haar grafiek. Een handige manier om de grafiek van de afgeleide punt voor punt te tekenen

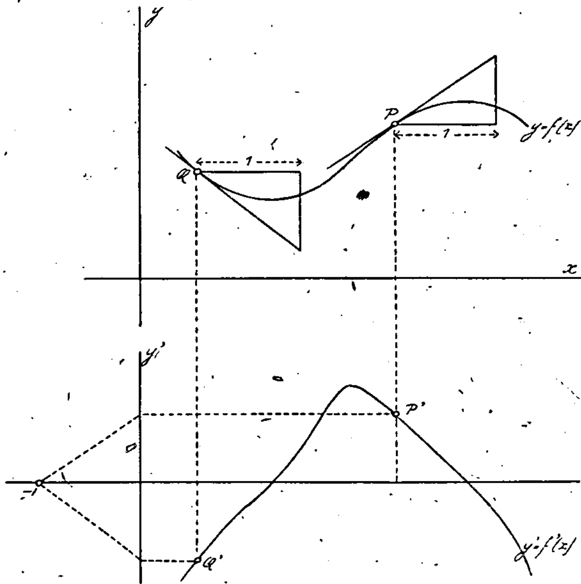


Fig. 2.

is dan de volgende [2]). In het bovengedeelte van fig. 2 is de functie $y = f(x)$ grafisch voorgesteld, en in het benedengedeelte willen we de grafiek van de afgeleide tekenen. Om nu de afgeleide in het punt P te construeren, ten einde die zelf in het benedengedeelte van de figuur loodrecht onder het punt P als ordinaat van een punt P′ te kunnen uitzetten, zou men △ PAS van fig. 1 kunnen aanbrengen. Praktischer is het, om deze en al dergelijke driehoeken evenwijdig te verschuiven naar het punt met abscis — 1 op de onderste x-as. De constructie van het punt P′ gaat dan als volgt: trek de raaklijn in P en trek door het punt — 1 van de benedenste x-as de lijn daarmee evenwijdig tot deze de y'-as snijdt; trek door dit snijpunt de lijn evenwijdig aan de x-as en snijd deze lijn met de loodlijn

[1]) A. Harnack, Beiträge zu einer Didaktik der Differential- und Integralrechnung, Zeitschrift für math. u. naturw. Unterr. 55 (1924) 65—82.

[2]) Zie bijv. A. Rohrberg, Didaktik des mathematischen Unterrichts (Berlin, Oldenbourg, 1930) 30.

door P op de x-as; het snijpunt is P'. Wanneer men de handgrepen een keer kent, kan men in korte tijd een groot aantal punten van de grafiek der afgeleide functie construeren. Het is daarbij niet eens nodig, dat de raaklijnen aan de oorspronkelijke kromme werkelijk getekend worden; het is voldoende wanneer men zijn driehoek in de goede richting legt, om deze vervolgens langs de liniaal evenwijdig te verschuiven naar het punt — 1. En ook zelfs die evenwijdige rechten door het punt — 1 behoeft men niet te trekken; men kan volstaan met hun snijpunt met de y'-as aan te geven. Wanneer men op millimeterpapier werkt gaat alles al heel vlug in zijn werk.

Het effect is het grootst, wanneer men de grafieken van enkele afgeleiden reeds in het begin van de behandeling der differentiaalrekening laat tekenen. Wij doen dit met functies als $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{8}x^3$, $\sin x$ en $\cos x$. Het is daarbij voor vele leerlingen een verrassing om bij de functie $\frac{1}{2}x^2$ als grafiek van de afgeleide een rechte lijn tevoorschijn te zien komen, bij $\frac{1}{8}x^3$ een parabool en bij $\sin x$ en $\cos x$ krommen, die congruent zijn met de gegeven krommen. Op deze manier worden inductief reeds de vergelijkingen van enkele afgeleide functies gevonden, hetgeen de belangstelling prikkelt voor het later te geven bewijs.

7. Voor we overgaan tot de beschouwing van de hoofdstelling der integraalrekening, willen we eerst een opmerking maken over het nadeel, dat er verbonden is aan het gebruik van de uitdrukking „onbepaalde integraal" bij ons onderwijs.

Zowel wanneer men „bepaald" en „onbepaald" in de uitdrukkingen „bepaalde integraal" resp. „onbepaalde integraal" als bijvoeglijke naamwoorden opvat, alsook wanneer men ze opvat als verleden deelwoorden, die als adjectief zijn gebruikt, in beide gevallen kunnen ze verwarrend werken.

a. Niet iedere bepaalde integraal is een „bepaald geval" van een onbepaalde integraal. Immers, een onbepaalde integraal van $f(x)$ is hetzelfde als een primitieve functie $F(x)$ van $f(x)$; een bepaalde integraal echter is niet altijd een functie: $\int_a^b f(x)dx$ is geen functie van x. Daarnaast wordt weliswaar ook de uitdrukking $\int_a^x f(x)dx$, waarin de bovengrens x veranderlijk is, een bepaalde integraal genoemd, en zo'n bepaalde integraal is inderdaad een functie van x, en wel een der primitieve functies $F(x)$.

Maar gesteld al, dat slechts de uitdrukkingen $\int_a^x f(x)\,dx$ aanspraak konden maken op de naam „bepaalde integraal", dan nog zou het begrip „onbepaalde integraal van $f(x)$" meer omvatten dan de verzameling van al deze bepaalde integralen. Toch wordt dit laatste wel eens ondersteld. Zo lees ik in een schoolboek[1]: „daar de constante C onbepaald is, noemt men $\frac{1}{3}x^3 + C$ de onbepaalde integraal van x^2". Dit sluit natuurlijk in, dat wanneer men nu een bepaalde keus doet voor die C, er dan wel een bepaalde integraal staat. Nu is dat in dit geval niet onjuist. Maar naar ik vrees bedoelt het nog meer in te sluiten, nl. dat een uitspraak als de tussen aanhalingstekens geplaatste m.m. ook geldt voor iedere andere functie dan de functie x^2. En dat is niet waar. Men neme bijv. de functie $y = x$; voor een positieve waarde van C is er nu geen onderste grens a te vinden, waarvoor $\int_a^x x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$.

b. Nu zou men mij kunnen tegenwerpen: geen wonder dat het niet uitkomt, wanneer men de uitdrukking „bepaalde integraal" opvat in de betekenis van „bepaald geval van een onbepaalde integraal", want dit bedoelt men er immers ook niet mee; men bedoelt met „bepaalde integraal" een oppervlak, dat tussen twee grenzen is ingesloten, waarvan er minstens één vast is, terwijl men bij de onbepaalde integraal onderstelt, dat deze „bepalingen", deze grenzen beide zijn weggenomen, d.w.z. bewegelijk zijn gemaakt.

Laten we ons echter eens even voorstellen, hoe dat wegnemen van die grenzen in zijn werk gaat. $\int_a^b f(x)dx$ stelt een oppervlak voor, dat aan twee zijden star begrensd is, een „volkomen bepaalde" integraal. Bij $\int_a^x f(x)dx$ heeft men te doen met een oppervlak, waarvan de „rechter" grens veranderlijk is geworden, zodat dit oppervlak een functie van x is; men zou geneigd zijn hier te spreken van een „half bepaalde" integraal. Laten we nu ook nog de benedengrens variëren, waarmee in de functie van zoëven een parameter (= deze onderste grens) zijn intrede doet, dan is het beschouwde oppervlak aan geen enkele grens meer gebonden en hebben we de onbepaalde integraal. Maar ook bij deze opvatting stuit men op moeilijkheden.

---

[1]) Dr. W. A. Muller en I. Abram, Leerboek der Algebra IV (Zwolle, Tj. Willink, 1939) 64.

Immers, welke — natuurlijk reëele — waarden men ook kiest voor de parameter, d.w.z. voor die waarde van x, waar vanaf men het oppervlak rekent, altijd is bij deze beginwaarde van x de oppervlakte gelijk nul. Maar een willekeurige onbepaalde integraal, thans in de officiële betekenis van willekeurige primitieve functie, heeft niet altijd reële nulwaarden, zoals dan ook niet het geval is bij het onder *a.* beschouwde voorbeeld $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, voor een positieve waarde van de constante. Eën dergelijke primitieve functie kan dus onmogelijk een oppervlakte voorstellen.

Van welke kant men het dus ook beschouwt, het complex van uitdrukkingen „onbepaalde integraal" en „bepaalde integraal" kan gemakkelijk tot een verkeerde opvatting aanleiding geven. Het lijkt mij daarom wenselijk om de uitdrukking „onbepaalde integraal" bij ons onderwijs in het geheel niet te bezigen, en deze bijv. te vervangen door de uitdrukking „primitieve functie" [1]).

8. Het gebruikelijke bewijs voor de hoofdstelling van de integraalrekening bestaat uit de volgende onderdelen:

a. is $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$, dan is iedere primitieve functie van $f(x)$ te schrijven in de gedaante $F(x) + C$;

b. de oppervlakte O_a^x is een primitieve functie van $f(x)$;

c. uit *a* en *b* volgt: O_a^x is te schrijven in de vorm $F(x) + C$;

d. $C = - F(a)$;

e. uit *c* en *d* volgt: $O_a^x = F(x) - F(a)$;

f. $O_a^b = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Sigma\, f(x)\, \Delta x = \int\limits_a^b f(x) dx$;

g. uit *e* en *f* volgt: $\int\limits_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

We willen eens nagaan, in hoeverre deze onderdelen aanschouwelijk zijn in te zien, en op welke plaatsen de aanschouwing ons in de steek laat.

a. Is $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$, dan is iedere primitieve functie te schrijven in de gedaante $F(x) + C$.

Met deze stelling en haar bewijs wordt in de schoolboeken op allerlei manieren omgesprongen: soms wordt de stelling ook zelfs niet genoemd, maar wel stilzwijgend toegepast [2]), wat mijns inziens niet door de beugel kan; soms wordt de stelling genoemd en erbij

---

[1]) Dit geschiedt bij Dr. J. H. Wansink, Reken- en Stelkunde III (Groningen, Wolters, 1941) § 39.

[2]) Dr. A. v. Thijn en M. L. Kobus, Algebraïsche vraagstukken III (Groningen, Wolters, 1938) § 24.

gezegd, dat ze niet zal worden bewezen [1]), wat volkomen correct is; soms wordt ze genoemd en bovendien bewezen, maar dan wordt òf gebruik gemaakt van de onbewezen hulpstelling, dat slechts van een constante functie de afgeleide identiek nul is [2]), òf van dezelfde hulpstelling gebruik gemaakt maar die wordt dan bewezen door te steunen op aanschouwelijke elementen [3]); deze laatste manier kan dan weliswaar niet als geheel streng worden beschouwd, maar mij persoonlijk en ook onze leerlingen bevredigt zij volkomen. Op dit bewijs komen we aanstonds terug.

Men kan deze stelling op de beste manier voorbereiden door de leerlingen de grafiek van een functie $f(x)$ te geven en uit te nodigen, hierbij de grafiek van een primitieve functie te tekenen. Dit wordt dus de omgekeerde opgave van die, welke zij ter gelegenheid van fig. 2, § 6, hebben moeten uitvoeren. Al spoedig blijkt, dat de primitieve kromme op een willekeurige hoogte kan worden begonnen; maar verder blijkt ook op welke klip de constructie moet stranden. Men kan nl. (zie fig. 2) wel beginnen met op de gegeven grafiek een punt P′ te kiezen, dan door P′ een lijn evenwijdig aan de x-as trekken tot aan het snijpunt met de y'-as, dit verbinden met het punt —1, en deze verbindingslijn evenwijdig verschuiven tot ze door P gaat, waarbij P ergens, willekeurig, loodrecht boven P′ is aangenomen; hiermee is dan inderdaad de raaklijn in P aan de door P gaande primitieve kromme geconstrueerd. Kiest men echter vervolgens een tweede punt, Q′, op de gegeven kromme en in de buurt van P′, en tracht men dezelfde constructie voor Q′ uit te voeren, dan vindt men nu wel de *richting* van de raaklijn in Q, maar niet de raaklijn of het punt Q zelf; en ook is het dus niet mogelijk om het snijpunt te vinden van de raaklijnen in P en Q. Inmiddels kan men toch nog wel een vrij goede benadering van de gevraagde primitieve kromme krijgen, wanneer men als volgt de knoop doorhakt: men neemt eenvoudig als abscis van het bedoelde snijpunt het gemiddelde van de (bekende) abscissen der raakpunten P en Q, en handelt evenzo in alle volgende gevallen.

Aanschouwelijk is de stelling zeer plausibel: beschouwt men twee boven elkaar getekende primitieve krommen, dan kan men zich onmogelijk voorstellen, dat wel steeds de raaklijnen in twee verticaal boven elkaar gelegen punten evenwijdig lopen, maar dat de afstand

[1]) Dr. J. H. Wansink, o.c., blz. 71.
[2]) Dr. W. F. de Groot en Dr C. de Jong, Leerboek der Algebra III, (Groningen, Wolters, 1931) § 119.
[3]) P. Wijdenes, Algebraïsche vraagstukken III, (Groningen, Noordhoff, [8]1938) § 21.

tussen zulke punten niet constant zou zijn. Nu wordt het bewijs, zoals boven reeds werd aangeduid, wel in de volgende vorm gegeven. Zijn F(x) en G (x) twee primitieve functies van $f(x)$, dan is de afgeleide van G(x) — F(x) overal nul. De grafiek van deze verschil-functie heeft dus in elk harer punten een raaklijn, die evenwijdig is met de x-as. Hieruit volgt, dat die grafiek zelf een rechte is, evenwijdig met de x-as. Dus is G(x) — F(x) = C en G(x) = F(x) + C. Men heeft hierbij als zijnde zonder meer duidelijk de hulpstelling gebruikt, dat een „kromme", waarvan alle raaklijnen evenwijdig zijn met de x-as, zelf een rechte is, evenwijdig met de x-as. Inderdaad vind ik die hulpstelling ook intuitief duidelijk, net zo goed als de stelling, waarom het hier gaat en die met haar hulp bewezen wordt. Echter kan ik onmogelijk zeggen, welke van de twee ik nu eigenlijk aanschouwelijk het „meest" vanzelfsprekend moet vinden, de stelling zelf of de hulpstelling, en het komt mij dan ook voor, dat een bewijs als het hier besprokene net zo goed achterwege kan blijven.

Zoals bekend, kan men een eenvoudig analytisch bewijs van de hier gebruikte hulpstelling geven door gebruik te maken van de middelwaardestelling van de differentiaalrekening. Een voor het onderwijs bruikbaar bewijs van de middelwaardestelling vindt men in § 14.

b. De oppervlakte O_a^x is een primitieve functie van $f(x)$.

Eerst moet goed duidelijk worden gemaakt, dat de oppervlakte O_a^x van de figuur, ingesloten door de grafiek van $y = f(x)$, de x-as, en de twee ordinaten met abscissen a en x, een functie is van x. Men kan dit doen door uit te gaan van de grafiek der functie $y = mx$ (zie fig. 3) en daarbij de gearceerde oppervlakte als functie van x, de abscis van A, te berekenen en grafisch voor te stellen. De oppervlakte van △ OAA′ is gelijk aan $\frac{1}{2}mx^2$, zodat er een functie voor den dag komt, waarmee de klas reeds vertrouwd is. Ook de oppervlakte van de figuur, die men verkrijgt wanneer men een *willekeurige* begin-ordinaat als vast aanneemt, is nu gemakkelijk grafisch voor te stellen; er ontstaat dan een grafiek met de vergelijking $y = \frac{1}{2}mx^2 + C$. Op deze manier wordt niet alleen duidelijk gemaakt, dat O_a^x een functie is van x, maar de leerlingen zien ook, hoe eenvoudig de aard van

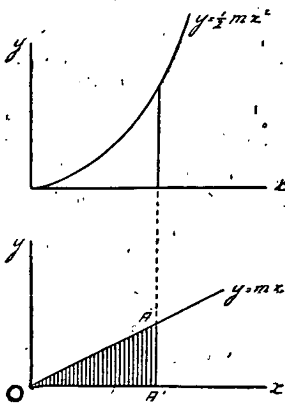


Fig. 3.

zo'n functie kan zijn, en bovendien kunnen zij er inductief mee bekend gemaakt worden dat een aldus verkregen functie juist een primitieve functie van $f(x)$ is.

Ook het bewijs hiervan, voor het algemene geval, nl. dat O_a^x een primitieve functie is van $f(x)$, is nog uit een figuur af te lezen. Duiden we O_a^x aan met $F(x)$, dan moet de definitie van de afgeleide van $F(x)$ worden toegepast: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. Deze limietovergang kan nu echter niet in de figuur op de gebruikelijke manier worden geïnterpreteerd, nl. door middel van een snijlijn, die door draaiing tot zijn limietstand, de raaklijn, nadert. Een toename van de functie $F(x)$ wordt nu niet uitgebeeld door een lijnstuk Δy, maar door de oppervlakte van een smalle strook, die van boven door een kromme lijn begrensd wordt. Iets dergelijks is nog niet eerder ter sprake gekomen en is, voor zover ik zie, ook niet voor te bereiden door het geven van practisch bruikbare vraagstukken, zoals dat integendeel wel het geval is bij de bespreking van het differentiequotient als de tangens van een hoek. Nu behoeft dit nieuwe van de uitbeelding van Δy niet een overwegend bezwaar te vormen, omdat het in elk geval nog een meetkundige interpretatie is van de toename der functie, die bovendien een meetkundige interpretatie toelaat van het differentiequotient. Wanneer men er nl. geen bezwaar in ziet om een stilzwijgend gebruik te maken van de stelling van Weierstrass, dat een continue functie iedere waarde tussen de grootste en de kleinste ook werkelijk aanneemt, dan wordt dit differentiequotient voorgesteld door de ordinaat van één der punten van de kromlijnige bovenrand van de smalle strook, die Δ O afbeeldt. En dan kan men verder uit de figuur onmiddellijk zien, dat de limiet van deze ordinaat gelijk is aan $f(x)$, wanneer Δx tot nul nadert. Ik acht het een groot voordeel, dat we op die manier het bewijs in een zo concreet mogelijke vorm geven; mijn ervaring leert mij, dat anders onze kans absoluut verkeken is om deze stof bij onze leerlingen erin te krijgen. Een redenering als de hier onderhavige, die niet door enige zelfwerkzaamheid van de zijde der leerlingen kan worden voorbereid en die verder nergens in de wiskunde gerepeteerd wordt, biedt maar weinig mogelijkheden om tot hun geestelijk eigendom te worden. Dat verreweg de meeste auteurs van algebraschoolboeken de concretisering van het differentiequotient voor dit bewijs niet toepassen, kan ik slechts verklaren uit een zekere afkeer van het toepassen van een in de school niet bewezen stelling als die van Weierstrass. Men geeft nl. het

bewijs van de stelling, dat $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$, dikwijls in de volgende gedaante (zie fig. 4):

$$\text{opp. rechthoek PQRS} < \Delta\ O < \text{opp. rechthoek PQR'S'}$$

$$f(x) \times \Delta\ x < \Delta\ O < f(x + \Delta\ x) \times \Delta\ x$$

$$f(x) < \frac{\Delta\ O}{\Delta\ x} < f(x + \Delta\ x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\ O}{\Delta\ x} = f(x).$$

Wanneer we het op deze manier behandelen en de klas heeft goed ingezien, hoe de laatste regel een logisch gevolg is van de eerste, dan is mijns inziens het besef omtrent het vanzelfsprekende van de stelling verdwenen. De kern van alles, en dat is hier toch zeker de meetkundige voorstelling, heeft in het begin van de redenering een bepaalde rol gespeeld, nl. om te komen tot zo'n „ingeschreven" en zo'n „omgeschreven" rechthoek; maar het met meetkundig inzicht werken is hier juist op het beslissende moment uitgeschakeld en vervangen door een mechanisch algebraisch proces: de leden van twee ongelijkheden door een zelfde getal $\Delta\ x$ delen, $\Delta\ x$ tot nul laten naderen, en het differentiaalquotient opvangen, dat uit de automaat komt rollen. We mogen niet klagen, wanneer onze leerlingen ons hier „moeilijk" gaan vinden.

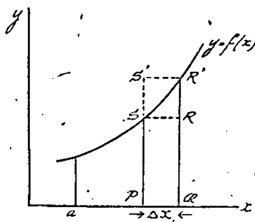


Fig. 4.

c. Uit *a* en *b* volgt: O_a^x is te schrijven in de vorm $F(x) + C$. Onder *b* zagen we reeds, hoe dit resultaat inductief kan worden voorbereid door een grafiek te maken van O_a^x bij de functie $y = mx$.

d en *e*. $C = -F(a)$, dus in verband met c : $O_a^x = F(b) - F(a)$.

In verreweg de meeste schoolboeken behandelt men het onderdeel *d* apart en bewijst dat $C = - F(a)$ door in de betrekking $O_a^x = F(x) + C$ voor x de waarde a te substitueren. Nu is dit een handelwijze, die ongetwijfeld door de leerlingen dient te worden gekend; het berekenen van een constante in een formule uit de natuurkunde kan eveneens geschieden door voor de veranderlijken eenvoudige waarden in te vullen; en in de mechanica interpreteert men de constanten b en c in de formule $s(t) = at^2 + bt + c$ door hierin, resp. in de afgeleide, voor t de waarde nul te substitueren. Evenwel, op het moment, waarop de integraalrekening dient te worden behandeld, dat wil voor de h.b.s. zeggen: in de vierde klas, hebben onze leerlingen nog geen handigheid in dit bepalen van een

constante; en dat is mijns inziens wel nodig, wil het begrijpen van dit tamelijk langademige bewijs van de hoofdstelling in deze voor hen nieuwe stof een enigszins glad verloop hebben. Het is dan ook gewenst om de behandeling van dit onderdeel te doen voorafgaan door oefeningen in het bepalen van zulke constanten; dit kan op ongedwongen wijze geschieden bij onderdeel *a*, door van enige functies de primitieve functie te doen bepalen, waarvan de waarde gegeven is voor een zekere gegeven waarde van x.

Een bezwaar echter vind ik het, dat met dit bepalen van de constante de aanschouwing weliswaar niet geheel wordt uitgeschakeld maar toch gedeeltelijk wordt vervangen door een algebraische handelwijze, het invullen van een zekere waarde voor x, waarbij dan min of meer als wonderverschijnsel te voorschijn komt: $C = -F(a)$. Meetkundig is nu volstrekt niet meer vanzelfsprekend, dat $O_a^x = F(x) - F(a)$. Een enkele keer wordt dit blijkbaar ook door de schrijvers van een schoolboek als moeilijkheid gevoeld. Zo wordt het bewijs van dit onderdeel van de hoofdstelling ergens [1]) op de volgende manier ingericht. Men begint met een concreet geval te nemen, nl. de functie $y = \frac{1}{4}x^2$, berekent de oppervlakte O vanaf de rechte $x = 3$ als functie van x, en vindt dus $O_3^x = \frac{1}{12}x^3 + C$, waarbij C gevonden wordt door voor x de waarde 3 in te vullen: $O_3^x = \frac{1}{12}x^3 - 2\frac{1}{4}$. Nu wordt hier echter *niet* uitdrukkelijk opgemerkt, dat hiermee aan de hand van een voorbeeld is gedemonstreerd: $O_3^x = F(x) - F(3)$; integendeel, deze formule, en dan in de vorm $O_a^b = F(b) - F(a)$, wordt verder aangetoond met de volgende redenering. Door in de gevonden formule $O_3^x = \frac{1}{12}x^3 - 2\frac{1}{4}$ voor x achtereenvolgens b en a te substitueren en daarna af te trekken komt er (fig. 5):

$$\begin{aligned} \text{opp. ABFE} &= \tfrac{1}{12}b^3 - 2\tfrac{1}{4} \\ \text{opp. ABDC} &= \tfrac{1}{12}a^3 - 2\tfrac{1}{4} \\ \hline \text{opp. CDFE} &= \tfrac{1}{12}b^3 - \tfrac{1}{12}a^3. \end{aligned}$$

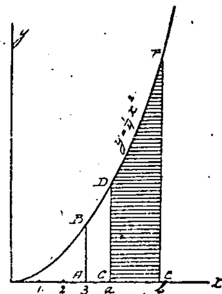


Fig. 5.

Deze laatste redenering is nu weer geheel uit de figuur af te lezen; als een keer bekend is, dat de oppervlakte, gerekend vanaf de loodlijn op de x-as met abscis 3, door de formule $\frac{1}{12}x^3 - 2\frac{1}{4}$ wordt aangegeven, en men onderstelt, dat a en b beide groter zijn dan 3 en dat $b > a$ is, dan is onmiddellijk uit de figuur te zien, dat $O_a^b = O_3^b - O_3^a = F(b) - F(a)$, als men voor $F(x)$ de functie $\frac{1}{12}x^3 - 2\frac{1}{4}$ neemt.

[1]) van Thijn en Kobus, o.c., § 24.

Evenwel is hieraan dus voorafgegaan de bepaling van de constante — $2\frac{1}{4}$ op een niet aanschouwelijke manier. Men kan daarom beter het bewijs vereenvoudigen, door die constante eerst terzijde te laten en, thans voor een willekeurige functie $y = f(x)$, als volgt te redeneren: „Kies een punt op de x-as met abscis p, zó dat $p < a$ is. Laat de functie O_p^x van x worden voorgesteld door de primitieve functie $F(x)$ van $f(x)$. Dan is $O_a^b = O_p^b - O_p^a = F(b) - F(a)$. Neemt men hierin nu i.p.v. de functie $F(x)$ een willekeurige andere primitieve functie van $f(x)$, die dus wordt voorgesteld door $F(x)+C$, dan heeft dit op de uitkomst geen invloed wegens het wegvallen van de constante." Deze redenering heeft echter het bezwaar, dat ze niet voor alle gevallen doorgaat. Het is is nl. niet altijd mogelijk om, bij gegeven waarden van a en b (met $a < b$), een abscis p te kiezen kleiner dan a, en de oppervlakte vanaf dat punt aan te duiden met O_p^x. Dit lukt bijv. niet steeds bij een functie als $y = \sqrt{x}$, die alleen voor positieve waarden van x gedefinieerd is (fig. 6). Neemt men $a = o$, dan is er geen p meer links van a, waar vanaf men de oppervlakte kan rekenen.

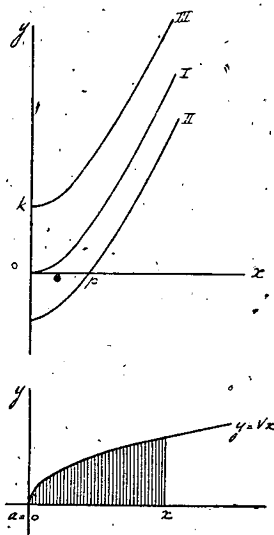


Fig. 6.

In de tekst, waaraan ik fig. 5 met het daarbij besprokene ontleende, wordt het wegvallen van de constante, wanneer men voor de berekening van O_a^b bij de functie $\frac{1}{4}x^2$ een *willekeurige* primitieve functie neemt i.p.v. de functie $\frac{1}{12}x^3 - 2\frac{1}{4}$, verklaard door de grootte van die constante te koppelen aan de plaats van de rechte $x = p$, waar vandaan men de oppervlakte begint te meten. Inderdaad, kiest men in fig. 5 in de plaats van AB een andere beginordinaat A′B′ met abscis p', en rekent men de oppervlakte hier te beginnen, dan komt er een andere constante; en door de aftrekking $O_{p'}^b - O_{p'}^a$ valt ook deze constante weg. Hieruit wordt dan de conclusie getrokken, dat de constante altijd wegvalt. Dit bewijs geldt nu echter alleen voor zulke constanten, die ontstaan door een bepaalde keus van de begin ordinaat, maar er zijn er ook andere, zoals wij reeds zagen in § 7. We willen dit hier nog eens met andere woorden toelichten en kiezen daartoe als uitgangsfunctie de bovengenoemde functie $y = \sqrt{x}$ (fig. 6). Hier wordt de gearceerde oppervlakte als functie van x voorgesteld door

$y = {}^2/_3 x^{3/2}$ (grafiek I in het boven-gedeelte van fig. 6). Laat men de oppervlakte niet beginnen bij de y-as, maar bij een andere loodlijn op de x-as, dan wordt zo'n oppervlakte als functie van x voorgesteld door een grafiek, die ontstaat door grafiek I naar beneden te verschuiven (grafiek II, beginordinaat bij $x = p$). Verschuift men grafiek I echter over een afstand k naar boven (naar stand III), dan geeft ze niet meer een zeker veranderlijk oppervlak uit de onderste figuur aan als functie van x, want dan zou voor $x = 0$ zo'n oppervlak reeds gelijk aan k moeten zijn. Toch kan ook III dienen als grafiek van een primitieve functie, en ook bij deze valt natuurlijk de constante weg bij de berekening van een oppervlak O_a^b; maar dan dus op andere gronden dan de bovengenoemde, en wel omdat de functies, voorgesteld door I en III, een constant bedrag verschillen, hetgeen tot gevolg heeft, dat $F(b) — F(a)$ voor beide functies dezelfde waarde heeft.

En dit voert ons tenslotte tot de, naar onze mening, meest geschikte manier om, in het kader van het gebruikelijke bewijs van de hoofdstelling, het onderdeel $O_a^x = F(x) — F(a)$, waarin $F(x)$ een willekeurige primitieve functie is van $f(x)$, te bewijzen. O_a^x is volgens b een zekere primitieve functie $O(x)$ van $f(x)$; stel $f(x)$ en $O(x)$ grafisch voor (fig. 7). Dan is $O_a^x = O(x) = O(x) — O(a)$, omdat $O(a) = 0$ is, zoals uit de figuur is af te lezen. Neemt men voor de berekening van de oppervlakte O_a^x i.p.v. de functie $O(x)$ een willekeurige primitieve functie $y = F(x)$, waarvan volgens a de grafiek uit die van $y = O(x)$ wordt verkregen door deze laatste over een zekere afstand in verticale richting te verschuiven, dan ziet men onmiddellijk uit de figuur, dat $F(x) — F(a)$ even groot is als $O(x) — O(a)$. Hieruit volgt, dat $O_a^x = F(x) — F(a)$. — Men zal opgemerkt hebben, dat bij deze behandelingswijze van onderdeel e het onderdeel d niet ter sprake komt.

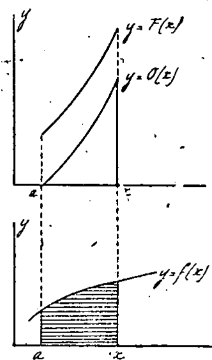


Fig. 7.

f. $O_a^b = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Sigma f(x) \, \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$

Dit gedeelte kunnen we bij ons onderwijs niet streng behandelen. We behelpen ons, door als intuitief duidelijk op te vatten wat men onder de oppervlakte van een kromlijnige figuur dient te verstaan, onderstellen, dat men de continue kromme $y = f(x)$ in een eindig

aantal monotone stukken kan verdelen, en sluiten het bij één zo'n stuk behorende oppervlak in tussen twee sommen van rechthoeken, een som van „ingeschreven" rechthoeken en een som van „omgeschreven" rechthoeken. Het verdient mijns inziens aanbeveling om ook hierbij de redenering weer niet al te algebraisch te geven, maar ervan gebruik te maken, dat het verschil tussen de omgeschreven en de ingeschreven rechthoeken meetkundig te interpreteren is als de oppervlakte van een rechthoek met hoogte $f(b) - f(a)$; we onderstellen hierbij, dat alle rechthoeken gelijke bases hebben.

Alvorens echter deze redenering voor het algemene geval te houden, lijkt het mij noodzakelijk om voor een paar concrete gevallen de te berekenen oppervlakte tussen twee van dergelijke sommen van rechthoeken daadwerkelijk in te sluiten, van deze sommen de oppervlakten te berekenen en tot de limiet over te gaan. Men kan dit door de klas laten uitvoeren bij functies als $y = x$, $y = x^2$ en $y = x^3$, waarbij men dan, zoals bekend is, stuit op de sommen $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en $\sum_{k=1}^{n} k^3$, die vooraf moeten worden uitgedrukt als functie van n [1]). Bereidt men de algemene behandeling van $\lim_{\Delta x \to 0} \Sigma f(x) \Delta x$ niet op een dergelijke manier voor, dan staat een beginner wat onwennig tegenover deze dubbele limietovergang, waarbij in de eerste plaats het aantal rechthoeken tot oneindig nadert en in de tweede plaats de breedte van iedere rechthoek afzonderlijk tot nul nadert. Bovendien maakt dan de gehele methode de indruk slechts van theoretisch belang te zijn, want men kan niet zo maar zonder meer bevroeden, dat zo'n limietovergang in de practijk dikwijls op eenvoudige wijze kan worden uitgevoerd.

g. Uit *e* en *f* volgt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Dit laatste punt geeft geen aanleiding tot een opmerking.

9. Deze bespreking van de gebruikelijke methode om de hoofdstelling van de integraalrekening te bewijzen, was niet zozeer bedoeld als volledige behandeling van de didactiek dezer methode, dan wel om te laten zien op welke plaatsen het onderwijs op aanschouwelijke manier kan worden gegeven en hoe dit kan geschieden. Het blijkt evenwel, dat het bewijs van de hoofdstelling op deze

---

[1]) Tot deze sommen $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en $\sum_{k=1}^{n} k^3$ komt men, wanneer men het interval (a, b) in *n gelijke* delen verdeelt. Door een andere verdeling te kiezen, nl. in stukken, die een volgens een meetkundige reeks toenemende lengte hebben, kan men het optreden van deze sommen vermijden.

manier tamelijk lang wordt; immers het bestaat uit een groot aantal stukken en bijna ieder van die stukken eist een zorgvuldig opgezette, nogal uitvoerige behandeling. Maar hierdoor dreigt het geheel van de redenering vrij onoverzichtelijk te worden; de ervaring leert mij dan ook, dat het niet gemakkelijk is dit complex van onderdelen te doen zien als één geheel vormend. Een minstens even groot bezwaar van deze bewijsgang is hierin gelegen, dat enkele onderdelen daarvan er zich niet toe lenen om, door het doen maken van geschikt gekozen opgaven, als vanzelf het geestelijk eigendom van de leerlingen te worden. Er moet bij deze gang van zaken teveel kennis van boven af worden aangebracht, teveel worden gedoceerd, en de zelfwerkzaamheid van de klas bestaat voornamelijk in het verwerken van datgene, wat haar wordt aangeboden, terwijl alleen met de verkregen *resultaten* zelfstandig werk wordt verricht.

Om deze redenen wil ik in hetgeen volgt een tweetal kortere bewijzen aangeven voor onderdeel *e* en wel zo, dat daardoor de onderdelen *a* tot en met *d* komen te vervallen. Hierdoor wordt reeds een aanzienlijke vereenvoudiging bereikt. Verder zullen deze bewijzen het voordeel hebben, dat ze gemakkelijk uit de figuur zijn in te zien, en bovendien zal blijken, dat men de klas aan het werk kan zetten en door middel van enige eenvoudige opgaven er geleidelijk toe kan brengen om de hoofdstelling als volkomen vanzelfsprekend te beschouwen.

Deze twee bewijzen zijn door mij bedacht naar aanleiding van de zg. grafische integratie. In § 8, onder *a,* zagen we een manier om bij een gegeven kromme $y' = f(x)$ een integraalkromme te tekenen. We maakten daarbij een tamelijk willekeurige afspraak omtrent de plaats van het snijpunt der raaklijnen in de aldaar beschouwde punten P en Q der integraalkromme. Nu is het mogelijk om deze willekeurige keuze van de plaats van dit snijpunt te vervangen door een andere, die volkomen verantwoord is. Om dit doel te bereiken kan men de oppervlakte van de figuur, ingesloten door de grafiek $y' = f(x)$, de ordinaten bij een begin- en een eindpunt, en de x-as, op een handige manier vervangen door die van een verzameling rechthoeken. Dit zijn nu echter geen ingeschreven en geen omgeschreven rechthoeken, maar op een enkele uitzondering na wijken ze daarvan in zoverre af, dat hun bovenrand de gegeven kromme snijdt, zodat ze gedeeltelijk buiten het door de kromme bepaalde oppervlak uitsteken, maar daartegenover ook weer bepaalde „vakjes" van dit oppervlak open laten. En nu kan men deze rechthoeken zo kiezen, dat het eerste open blijvende vakje even groot is als het eerste buiten het oppervlak uitstekende vakje, het tweede open blijvende vakje even groot als het tweede buiten het opper-

vlak uitstekende vakje, enz.; zie de figuren 12 en 15, waar resp. 3 en 5 van die rechthoeken zijn getekend. Heeft men een dergelijke verzameling van rechthoeken aangebracht, hetgeen vrij nauwkeurig op het oog af kan geschieden, en denkt men zich de raaklijnen aan de gezochte primitieve kromme getrokken in die punten, welke dezelfde abscis hebben als de snijpunten van de bovenrand van de rechthoeken met de gegeven kromme, dan wordt de plaats van de snijpunten van opeenvolgende exemplaren dezer raaklijnen aangegeven door de gemeenschappelijke grenslijnen van die rechthoeken. Ik moet hier volstaan met deze beknopte beschrijving; een uitvoerige uiteenzetting van deze methode om een gegeven functie grafisch te integreren, kan men vinden bij A. Walther[1]). In ieder geval is wel zoveel duidelijk, dat er een verband wordt gelegd tussen enerzijds een reeks rechthoeken bij de figuur, bepaald door de kromme $y' = f(x)$, en anderzijds een reeks raaklijnen aan de integraalkromme. Naar aanleiding hiervan merkt Walther op [2]): „Zur Uebung sei empfohlen, von einer Tangentenkette der Urkurve ausgehend die senkrechten Erhebungen bis zu den Tangenten als Rechtecke an der abgeleiteten Kurve auszudeuten und so zum Fundamentalsatze vorzudringen." Dit nu zal onze eerste manier worden om het onderdeel *e* van het bewijs van de hoofdstelling te behandelen en deze zal worden beschreven in de §§ 11 en 12.

Men kan echter de verzameling rechthoeken, waardoor het oppervlak van de door $y' = f(x)$ bepaalde figuur wordt benaderd, ook kiezen op de manier van fig. 18. Ook nu zijn de rechthoeken zo gekozen, dat het eerste open blijvende vakje even groot is als het eerste buiten het oppervlak uitstekende vakje, het tweede open blijvende vakje even groot als het tweede buiten het oppervlak uitstekende vakje, enz. Er blijkt nu weliswaar geen verband te bestaan tussen de, aldus opgebouwde, reeks rechthoeken en een, de integraalkromme benaderende, keten van raaklijnen; maar wel kan men nu, zoals in § 15 zal blijken, een verband aangeven tussen de reeks rechthoeken en de reeks koorden, waaruit een zekere, in de integraalkromme beschreven, gebroken lijn bestaat. En hieruit zal het tweede bewijs van het onderdeel *e* voortvloeien [3]).

---

1) A. Walther, Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen I (Berlin, Springer, 1928) 132 e. v.

2) o.c., 133.

3) Een bewijs, dat in wezen op hetzelfde neerkomt als dit tweede bewijs, maar dan in zuiver analytische vorm, kan men vinden in R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I (Berlin, Springer, 1930), 93. Bovendien blijkt mij achteraf, dat de in § 15 te beschrijven meetkundige inkleding van dit *tweede* bewijs ook reeds te vinden is bij Reinhardt, en wel in zijn genoemde boek, blz. 170 e. v.

10. We onderstellen, dat bij de behandeling van de differentiaalrekening het differentiaalquotient aanschouwelijk is toegelicht, zoals dat in § 6 werd uiteengezet, en dat door middel van deze toelichting is verduidelijkt, wat men bedoelt met „differentieërbaarheid"; verder, dat de leerlingen voldoende getraind zijn in het tekenen van de grafiek der afgeleide functie, volgens de eveneens in § 6 beschreven methode. Voor het eerste der te geven bewijzen zal het bovendien nodig zijn, dat het verband tussen het teken van de tweede afgeleide en de kromming van de grafiek der oorspronkelijke functie bekend is. Tenslotte nemen we aan, dat van het bewijs van de hoofdstelling het onderdeel *f*, dat geheel los staat van de rest van dit bewijs, op de onder *f* in § 8 besproken wijze is behandeld. In verband met het eerste te bespreken bewijs dient er hierbij nog op te worden gewezen, dat in de som $\Sigma\, f(x_i)\ .\ (\Delta\ x)_i$ de intervallen $(\Delta\ x)_i$ niet alle even groot behoeven te wezen, als het grootste maar tot nul nadert. In de bekende figuur, waarin we het door een deel der kromme $y = f(x)$ bepaalde oppervlak insluiten tussen twee sommen van rechthoeken, de „omgeschreven" en de „ingeschreven" rechthoeken, is dit weer onmiddellijk in te zien; immers men kan opmerken, dat het verschil tussen die twee sommen kleiner is dan een zekere, in de figuur te tekenen, rechthoek, met een basis gelijk aan het grootste der intervallen $(\Delta\ x)_i$ en met een hoogte gelijk aan $f(b)—f(a)$. En verder moet zowel voor het eerste als voor het tweede der te geven bewijzen worden opgemerkt, dat het er niet toe doet welke functiewaarde uit het interval $(\Delta\ x)_i$ er door $f(x_i)$ wordt voorgesteld, dat deze met name niet noodzakelijk de begin- of eindordinaat van het interval $(\Delta\ x)_i$ behoeft te zijn. Ook dit is duidelijk wanneer men bedenkt, dat de aldus door $\Sigma\, f(x_i)\ .\ (\Delta\ x)_i$ voorgestelde som van rechthoeken inligt tussen de bijbehorende sommen van ingeschreven- en van omgeschreven rechthoeken, en dus tot dezelfde limiet nadert als deze beide sommen.

11. *Eerste bewijs van het onderdeel e van de hoofdstelling.* We geven het bewijs aan de hand van de figuren 11, 12 en 15, voorbereid door de figuren 8, 9 en 10, en toegelicht door de figuren 13 en 14. Elke figuur gaat vergezeld van een opgave, die door de leerlingen dient te worden gemaakt. Het zal blijken, dat de stelling met haar bewijs op deze manier door de leerlingen bijna geheel zelfstandig kan worden afgeleid. — Het vervolg van deze § geeft in grote lijnen aan, in welke trant ik mij de behandeling in de klas voorstel.

Elk der figuren 8 t.e.m. 15 bestaat uit een boven- en een benedengedeelte; boven is de grafiek getekend van een functie $y = F(x)$, beneden die van haar afgeleide functie $y' = f(x)$.

Opgave 1. a. Ga in fig. 8 de constructie na van de afgeleide $f(x)$ van $F(x)$.

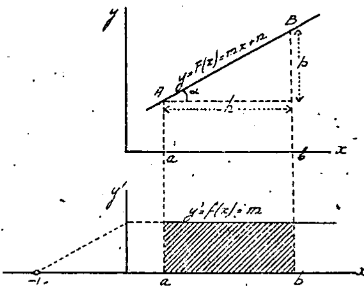


Fig. 8.

b. Te bewijzen: $O = h \operatorname{tg} \alpha = p = F(b) - F(a)$ (dit betekent: het gearceerde oppervlak bevat evenveel vlakte-eenheden als het lijnstuk BC lengte-eenheden).

In de opgaven 2 en 3 zullen we onderstellen, dat de functies $F(x)$ gedefinieerd zijn voor de waarden van x, die behoren tot het interval (a,b) van de x-as, en dat die functies een gebroken lijn tot grafiek hebben; in het bovengedeelte van de bijbehorende figuren 9 en 10 zijn die grafieken getekend. Kiest men in fig. 9 een punt ergens tussen A en P of ook in A zelf, dan is het duidelijk, dat de helling van de grafiek, dat is de afgeleide van de functie $y = F(x)$, in dat punt gelijk is aan de tangens van de hoek tussen AP en de positieve x-richting. En in een punt tussen P en B of ook in B zelf is de hel-

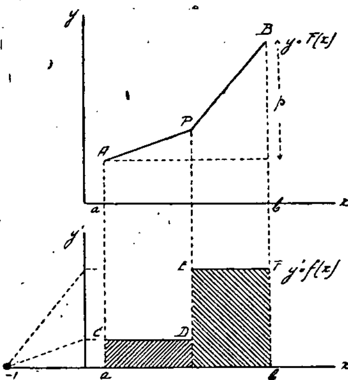


Fig. 9

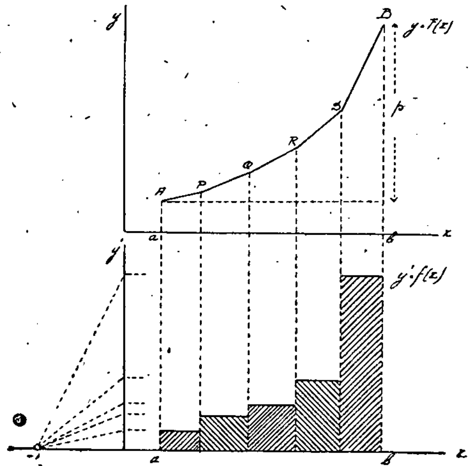


Fig. 10.

ling van de grafiek gelijk aan de tangens van de hoek tussen PB en de x-as. Maar we verkeren in het onzekere omtrent hetgeen we zullen moeten verstaan onder de helling van de grafiek in het punt P, alwaar de grafiek een knik vertoont. Inderdaad hebben we in de differentiaalrekening gehad, dat voor de bijbehorende waarde van x de functie geen afgeleide bezit. Een dergelijke opmerking geldt ook

voor de punten P, Q, R en S in fig. 10. Het gevolg hiervan is, dat bij zo'n functie $y = F(x)$, voorgesteld door een gebroken lijn, de afgeleide functie $y' = f(x)$ voor enkele waarden van x niet gedefinieerd is; de grafiek van de afgeleide functie zal nu bestaan uit twee of meer horizontale lijnstukken, waartoe echter, in verband met het zo juist opgemerkte, niet alle eindpunten gerekend mogen worden.

Opgave 2. a. Ga in fig. 9 na, dat de grafiek van de afgeleide $y' = f(x)$ van de functie $y = F(x)$ bestaat uit de twee lijnstukken CD en EF (zonder de eindpunten D en E).

b. Te bewijzen: $\sum_a^b O = p = F(b) - F(a)$.

(Met $\sum_a^b O$ wordt bedoeld de som der oppervlakten van de gearceerde rechthoeken).

Opgave 3. a. Ga in fig. 10 de constructie na van de afgeleide $f(x)$ van $F(x)$.

b. Te bewijzen: $\sum_a^b O = p = F(b) - F(a)$.

In elk der figuren 11 t.e.m. 15 is steeds het tussen de punten A en B gelegen deel der grafiek van één zelfde functie $y = F(x)$ getekend, benevens het corresponderende stuk A'B' van de grafiek der afgeleide functie $y' = f(x)$. We onderstellen, dat het door boog A B voorgestelde deel der functie $y = F(x)$ positief is en monotoon toeneemt, en dat deze boog zijn bolle zijde naar beneden keert; dit laatste betekent, zoals in de differentiaalrekening behandeld is, dat de tweede afgeleide van $F(x)$ hier positief is.

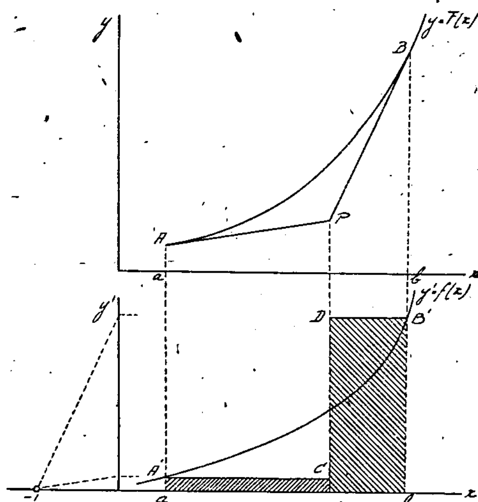


Fig. 11.

Opgave 4 (fig. 11). In A en B zijn de raaklijnen AP en BP getrokken aan de grafiek der functie $y = F(x)$. Deze vormen samen de gebroken lijn APB, welke we beschouwen als de grafiek van de functie $y = G_1(x)$.

Te bewijzen. *a.* De afgeleide $y' = g_1(x)$ van de functie $y = G_1(x)$ bestaat uit de horizontale bovenrand van de gearceerde figuur (zonder de punten C en D).

b. $\sum_a^b O = F(b) - F(a)$.

Vraag. Als in het benedengedeelte van fig. 11 de grafiek van de functie $y' = f(x)$ reeds getekend is, maar die van de functie $y' = g_1(x)$ nog niet, kan men dan de constructie van deze laatste grafiek ook uitvoeren met gebruikmaking van die der functie $y' = f(x)$, en zonder het punt -1 op de x-as te gebruiken?

Antwoord. Ja! Immers de helling van het lijnstuk A P is gelijk aan de helling van de boog A B in het punt A, d.w.z. gelijk aan de afgeleide van $y = F(x)$ voor $x = a$, en die wordt aangegeven door de ordinaat aA' van het punt A' in de benedenste figuur. Dus de afgeleide van het gedeelte der functie $y = G_1(x)$, voorgesteld door het lijnstuk A P, heeft tot grafiek het horizontale lijnstuk A'C. Evenzo vindt men, door gebruik te maken van het punt B' op de grafiek van $y' = f(x)$, het lijnstuk DB' als grafiek der afgeleide functie van het gedeelte, voorgesteld door PB.

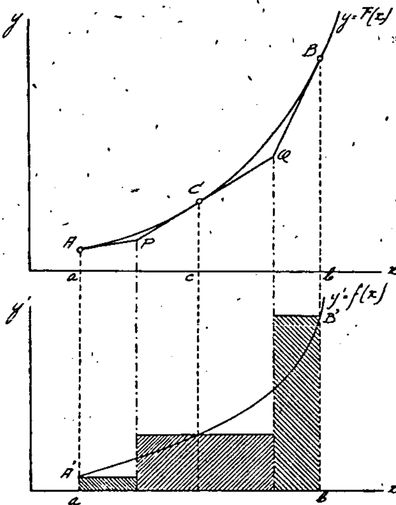


Fig. 12.

Opgave 5. Aan de grafiek $y = F(x)$ van opgave 4 zijn nu, d.w.z. in fig. 12, drie raaklijnen A P, P Q en Q B getrokken (c is het midden van (a,b)). Deze vormen samen een gebroken lijn A P Q B, die we beschouwen als grafiek van de functie $y = G_2(x)$.

Te bewijzen. *a.* De afgeleide $y' = g_2(x)$ van de functie $y = G_2(x)$ heeft tot grafiek de horizontale bovenrand van de gearceerde figuur (met uitzondering van enkele eindpunten).

b. $\sum_a^b O = F(b) - F(a)$.

Opgave 6. Aan de grafiek $y = F(x)$ van fig. 13 zijn de raaklijnen A R, R S en S B getrokken. De gebroken lijn A R S B beschouwen we als grafiek van een zekere functie $y = H(x)$.

Teken op de kortste manier (zonder gebruik te maken van het punt —1 op de x-as) de grafiek der afgeleide functie $y' = h(x)$ van de functie $y = H(x)$.

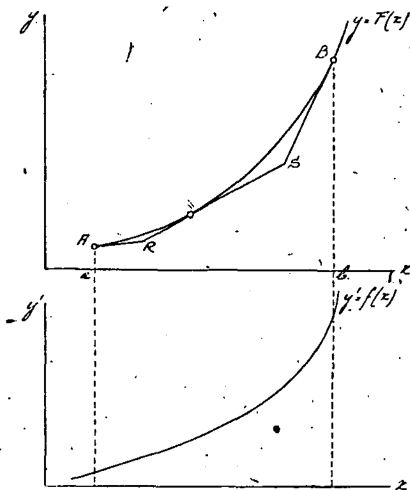


Fig. 13.

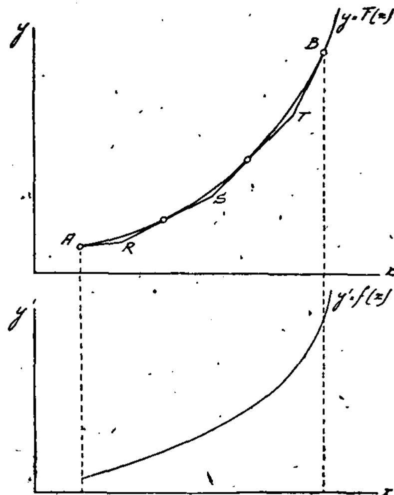


Fig. 14.

Opgave 7. Aan de grafiek $y = F(x)$ van fig. 14 zijn de raaklijnen AR, RS, ST en TB getrokken. De gebroken lijn ARSTB beschouwen we als grafiek van een zekere functie $y = K(x)$.

Teken op de kortste manier de grafiek der afgeleide functie $y' = k(x)$ van de functie $y = K(x)$.

Opgave 8. Aan de grafiek $y = F(x)$ van de opgaven 4 en 5 zijn nu, d.w.z. in fig. 15, de vijf raaklijnen AP, PQ, QR, RS en SB zo getrokken, dat het interval (a, b) door de punten c, d en e in vier gelijke delen wordt verdeeld. De gebroken lijn APQRSB beschouwen we als grafiek van de functie $y = G_3(x)$.

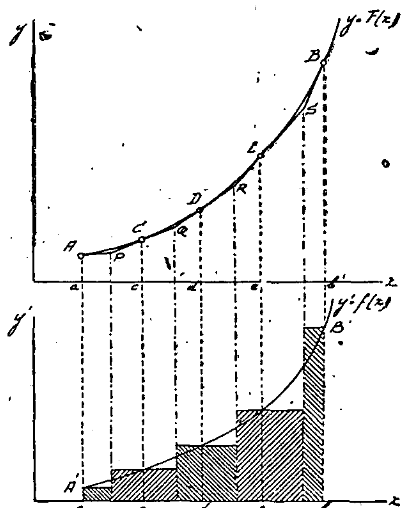


Fig. 15.

Te bewijzen. *a.* De afgeleide $y' = g_3(x)$ van de functie $y = G_3(x)$ heeft tot grafiek de

horizontale bovenrand van de gearceerde figuur (met uitzondering van enkele eindpunten).

b. $\sum_a^b O = F(b) - F(a)$.

We beschouwen de figuren 11, 12 en 15. De kromme $y = F(x)$ is hierin achtereenvolgens benaderd door de gebroken lijnen APB, APQB en APQRSB. En in de figuur van de afgeleide hadden we dientengevolge eerst 2 rechthoeken, daarna 3 en toen 5. We kunnen ons nu dit proces voortgezet denken: in fig. 12 verdeelde het punt c het interval (a, b) in 2 gelijke delen, waardoor 3 rechthoeken ontstonden, in fig. 15 verdelen de punten c, d en e het interval (a, b) in 4 gelijke delen, waarbij 5 rechthoeken; vervolgens kunnen we ons (a, b) in 8 gelijke delen verdeeld denken, waarbij 9 rechthoeken zullen ontstaan, dan in 16 gelijke delen met 17 rechthoeken, enz. In elk stadium van die verdeling geldt $\sum_a^b O = F(b) - F(a)$, d.w.z. *de totale oppervlakte van de rechthoeken is altijd even groot.* Nu hebben we dergelijke sommen van rechthoeken reeds eerder beschouwd (zie het slot van § 10) en het bleek ons, dat, bij een onbegrensd toenemen van het aantal van zulke rechthoeken en een tegelijkertijd tot nul naderen van de grootste hunner bases, de som van hun oppervlakten tot een limiet nadert; deze limiet is de oppervlakte van de figuur, ingesloten door de grafiek $y' = f(x)$, de ordinaten bij a en b, en de x-as, welke oppervlakte we verder zullen aanduiden met O_a^b. Ook voor onze veranderlijke som van rechthoeken geldt dus, dat ze onbegrensd nadert tot O_a^b. Maar in ieder stadium van deze verandering is, zoals we zagen, de totale oppervlakte steeds even groot, nl. gelijk aan $F(b) - F(a)$; hieruit volgt, dat ook de limiet, O_a^b, gelijk moet zijn aan $F(b) - F(a)$, zodat we hebben: $O_a^b = F(b) - F(a)$.

12. Dat inderdaad de breedte van onze rechthoeken tot nul nadert, blijkt als volgt.

De raaklijnen, die men trekt in twee op elkaar volgende deelpunten van de kromme $y = F(x)$, bijv. in de punten C en D van fig. 15, snijden elkaar binnen de verticale strook, begrensd door de rechten, gaande door die punten en evenwijdig met de y-as, in dit geval de lijnen Cc en Dd. Mocht iemand er bezwaar tegen hebben, om dit als vanzelfsprekend te doen aanvaarden, dan kan hij het op de volgende manier bewijzen. Daarbij is het practischer om het bovengedeelte van fig. 11 te beschouwen, waarin boog A B dezelfde rol speelt als boog CD in fig. 15, welke laatste wat klein uitvalt.

Langs de boog A B is, volgens onze onderstelling, de tweede afgeleide positief; de eerste afgeleide is dus een toenemende functie en kan derhalve in de punten A en B niet dezelfde waarde hebben. Hieruit volgt, dat de raaklijnen in A en B niet evenwijdig zijn; zij P hun snijpunt. Omdat zowel in A als in B de afgeleide van de functie $y = F(x)$ bestaat (en wel van de grootte $A'a$ resp. $B'b$ in de onderste figuur), loopt geen der raaklijnen in A en B verticaal, zodat we bij de raaklijn in A kunnen spreken van het gedeelte, dat naar rechts wijst, en bij de raaklijn in B van het gedeelte, dat naar links wijst. We moeten nu bewijzen, dat het punt P op die twee gedeelten van de raaklijnen ligt, want alleen dan ligt P zowel rechts van Aa als links van Bb. Omdat de tweede afgeleide overal positief is, keert boog AB zijn bolle kant naar beneden en ligt geheel boven elk van zijn raaklijnen. Boog A B ligt dus, met uitzondering van het punt A, geheel boven de raaklijn A P, en dus ligt ook het punt B boven A P. Deze rechte kan dan het naar rechts wijzende gedeelte van de raaklijn in B niet snijden, want in dat geval zou deze laatste raaklijn een kleinere helling hebben dan de eerste, zoals onmiddellijk uit een figuur blijkt, en dit is in strijd met het steeds toenemen van de helling. Dus snijdt A P het naar links wijzende gedeelte van de raaklijn in B. Evenzo bewijst men, dat B P het naar *rechts* wijzende gedeelte van de raaklijn in A snijdt, zodat het snijpunt P inderdaad tussen de rechten Aa en Bb ligt.

Zo zal dus ook in fig. 15 het snijpunt Q van de raaklijnen in C en D zich tussen de verticale rechten Cc en Dd bevinden, en het snijpunt R van de raaklijnen in D en E tussen de rechten Dd en Ee. De punten Q en R liggen dus beide tussen Cc en Ee, en hieruit volgt, dat in het benedengedeelte van de figuur de breedte van de middelste rechthoek kleiner is dan het interval (c, e) van de x-as, dus kleiner dan het $^2/_4$ deel van het interval (a, b) en als (a, b) in n gelijke delen is verdeeld in plaats van in 4, kleiner dan het $\frac{2}{n}$ deel van (a, b). Aangezien een dergelijke opmerking voor elk van de rechthoeken kan worden gemaakt, met een kleine verandering voor de eerste en de laatste rechthoek, zien we, dat hun breedte met toenemende waarden van n tot nul nadert.

13. Het is verleidelijk om de redenering van § 11 enigszins te bekorten en om, na de bespreking van opgave 3, fig. 10, als volgt verder te gaan.

Is $y = F(x)$ een functie met continue afgeleide $y' = f(x)$, welke beide functies voor het interval (a, b) van de x-as weer op de gebruikelijke manier in een boven- en benedenfiguur grafisch zijn

voorgesteld, dan kan men de grafiek $y = F(x)$ benaderen door de grafieken van de functies $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_n(x)$, ..., zó dat ieder exemplaar van deze laatste grafieken een keten van raaklijnen is aan de grafiek $y = F(x)$ en dat $\lim G_n(x) = F(x)$. Bij elk der functies $y = G_n(x)$ denken we ons de grafiek van de afgeleide functie $y' = g_n(x)$ geconstrueerd, bestaande uit een verzameling horizontale lijnstukken (waarvan weer niet alle eindpunten meedoen) — evenwel zonder er thans op te letten, dat de kromme $y' = f(x)$ door de grafiek van $y' = g_n(x)$ wordt gesneden, en dat men de plaats van de snijpunten onmiddellijk kan afleiden uit de raakpunten van de grafiek $y = G_n(x)$ met de kromme $y = F(x)$; zie de in § 11 gestelde en beantwoorde vraag. — Brengen we tenslotte bij elke functie $y' = g_n(x)$ weer de bijbehorende verzameling rechthoeken aan, en stellen we de som der oppervlakten van deze rechthoeken voor door Σ_n, dan geldt voor iedere waarde van n: $\Sigma_n = G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. Laat men nu n onbegrensd toenemen dan nadert de functie $y = G_n(x)$ onbegrensd tot de functie $y = F(x)$, en dus zal ook de afgeleide $y' = g_n(x)$ van de eerste onbegrensd naderen tot de afgeleide $y' = f(x)$ van de tweede. Maar dan nadert ook het rechthoeken-oppervlak Σ_n onbegrensd tot het oppervlak O_a^b. En omdat Σ_n constant en gelijk aan $F(b) - F(a)$ is, volgt hieruit:

$$O_a^b = \lim_{n \to \infty} \Sigma_n = F(b) - F(a).$$

Hiermee is het bewijs, dat we in § 11 bespraken, inderdaad bekort; evenwel, deze redenering kan, zelfs wanneer men een nauwkeuriger formulering bezigt dan boven is geschied, niet als bevredigend worden beschouwd. Dat de functie $y = G_n(x)$ „onbegrensd nadert" tot de functie $y = F(x)$, is wel uit de figuur af te lezen, en ook, dat de oppervlakte Σ_n tot limiet O_a^b heeft, als $y' = g_n(x)$ tot de limiet $y' = f(x)$ nadert; dat echter uit het tot de limiet $y = f(x)$ naderen van de functie $y = G_n(x)$ volgt, dat de afgeleide $y' = g_n(x)$ ook de afgeleide $y' = f(x)$ tot limiet heeft, is niet zonder meer duidelijk en in zijn algemeenheid zelfs onjuist. Om dit laatste in te zien neme men bijv. de functie $y = \sin x$ met haar afgeleide $y' = \cos x$; men kan de grafiek van de eerste functie gemakkelijk tot de x-as, de grafiek van de functie $y = F(x) \equiv 0$, laten naderen door de hele figuur evenredig te verkleinen en dit proces onbegrensd voort te zetten $(G_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx)$, maar daarbij nadert de grafiek van de afgeleide functie in genen dele tot de x-as, de grafiek van de functie $y' = f(x) \equiv 0$, want deze afgeleide $(G'_n(x) = \cos nx)$ blijft steeds hetzelfde gebied van functiewaarden bestrijken.

Wij willen op deze kwestie niet verder ingaan, maar volstaan met de volgende, hierop betrekking hebbende, stelling te memoreren: nadert de functie $G_n(x)$ onbegrensd tot $F(x)$ en nadert de afgeleide $g_n(x)$ van de eerste functie gelijkmatig tot $f(x)$, dan is $f(x)$ de afgeleide van $F(x)$ [1].

14. Voor het tweede bewijs van het onderdeel *e* van de hoofdstelling zullen we de zg. middelwaardestelling van de differentiaalrekening nodig hebben, welke als volgt luidt: als een functie $f(x)$ voor het gesloten interval (a,b) differentieerbaar is, dan bestaat er een waarde c zo, dat $a < c < b$ is en waarvoor het differentiaalquotient de waarde $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ heeft; anders gezegd (zie fig. 16): op de boog A B bevindt zich een punt C, waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met de koorde A B.

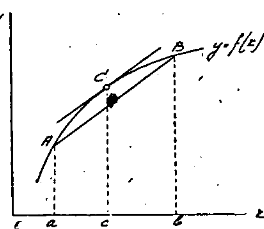


Fig. 16.

Nu heb ik zelf er niet alleen niet het minste bezwaar tegen om, bij een eerste behandeling het bestaan van deze evenwijdige raaklijn, en dus de juistheid van onze stelling, als intuïtief duidelijk te doen aanvaarden, althans wanneer men in de figuur erop heeft gewezen, dat de mogelijkheid van het bestaan van een knik of een keerpunt op grond van het gegevene is uitgesloten; maar zelfs acht ik het in dit stadium niet eens gewenst om een min of meer streng bewijs van een stelling als deze te geven. In ieder geval zullen wij er moeite mee hebben om onze leerlingen van de noodzakelijkheid van zo'n bewijs te overtuigen. Het lijkt mij integendeel beter om zo vlug mogelijk door te stoten in de richting van de hoofdstelling, ten einde snel een overzicht te verschaffen over het bewijs hiervan en om zo spoedig mogelijk een indruk te geven van de belangrijkheid van deze stelling. Achteraf kan men nog eens op enkele ondergeschikte punten terugkomen, en dan wordt het overzicht over de grote lijn van de redenering er niet meer door belemmerd. Wat het bewijs van de middelwaardestelling betreft, willen wij dat nu niet tot het eind uitstellen, maar ons van te voren er van vergewissen, hoe dit in een vorm kan worden gegoten, die voor ons onderwijs geschikt is.

Vooraf moet gaan het volgende bijzondere geval van de middelwaardestelling, bekend onder de naam van theorema van Rolle:

[1]) E. Goursat, Cours d'analyse mathématique I, (Paris, 5me éd., 1923 e.v.), 67. De genoemde stelling drukt een voldoende voorwaarde uit; men kan gemakkelijk aantonen, dat deze niet noodzakelijk is.

tussen twee nulpunten van een functie $f(x)$ bevindt zich een waarde van x, waarvoor de afgeleide nul is, d.w.z. er ligt op de boog A B van fig. 17 een punt C, waar de raaklijn horizontaal loopt. Alles onder de bekende voorwaarde, dat $f(x)$ in het gesloten interval (a,b) differentieerbaar is, terwijl de stelling natuurlijk de mogelijkheid open laat, dat er meer van dergelijke punten C bestaan.

Bewijs van de stelling van Rolle.

We nemen aan, dat de functie voor $x = a$ toenemend is. Daar de functie voor $x = b$ weer nul moet worden, moet ergens het toenemen ophouden om over te gaan in afnemen. Uit het differentieerbaar zijn van de functie volgt nl., dat ze een continu verloop heeft. Laat c een waarde van x zijn, waarvoor het toenemen overgaat in afnemen. We brengen de goniometrische cirkel aan met middelpunt C, het punt van de grafiek met abscis c, geven deze cirkel de straal 1, en trekken de verticale raaklijn, die de cirkel in D raakt. Omdat de grafiek in alle tussen A en B gelegen punten een raaklijn bezit, is dit ook in C het geval. We willen onderstellen, dat deze de verticale raaklijn in S snijdt. Dan is C S de limietstand, waartoe een snijlijn C R van de kromme nadert, als R langs de boog A C onbegrensd tot C nadert. Aangezien links van C de punten van boog A C zich dichter bij de x-as bevinden dan het punt C zelf, zullen de lijnen C R de verticale raaklijn in punten R′ snijden, die boven D liggen; hieruit volgt, dat de limiet S van deze punten R′ niet beneden D kan liggen. C R is evenwel ook de limietstand, waartoe een snijlijn C Q van de kromme nadert, als Q langs de boog B C onbegrensd tot C nadert. Omdat rechts van C de punten van boog B C zich dichter bij de x-as bevinden dan het punt C zelf, zullen de lijnen C Q de verticale raaklijn in punten Q′ snijden, die onder D liggen; hieruit volgt dat S, de limiet ook van deze punten Q′, niet boven D kan liggen. Aangezien S niet beneden en niet boven D ligt, valt S met D samen, m.a.w. de raaklijn in C loopt horizontaal. — We hebben in dit bewijs geen rekening gehouden met de mogelijkheid, dat de grafiek over een zekere afstand een rechtlijnig verloop heeft evenwijdig met de x-as; in dat geval is het bewijs echter onmiddellijk aan te geven.

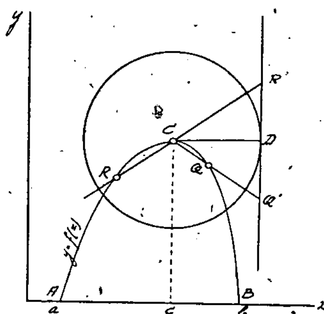


Fig. 17.

Bewijs van de middelwaardestelling (zie fig. 16).

We vatten de rechte A B op als grafiek van de functie $y = g(x)$.

Dan voldoet de verschil-functie $V(x) = f(x) - g(x)$ aan de voorwaarden van het theorema van Rolle, d.w.z. $V(a) = V(b) = 0$ en $V(x)$ bezit voor elke tussen a en b gelegen waarde van x, met inbegrip van de waarden a en b zelf, een afgeleide. Dus is er een waarde van x tussen a en b, waarvoor $V'(x) = 0$, d.w.z. waarvoor $f'(x) = g'(x)$; in het bijbehorende punt loopt dan de raaklijn evenwijdig met A B. — Het verdient aanbeveling om dit bewijs te verduidelijken door de grafiek van de functie $V(x)$ er even bij te tekenen; dan wordt het verband tussen deze stelling en die van Rolle volkomen helder.

15. *Tweede bewijs van het onderdeel e van de hoofdstelling.*

Bij het doorlezen van deze § zal het duidelijk zijn, dat de didactiek van deze tweede manier om onderdeel e te bewijzen op een dergelijke wijze kan worden opgezet als bij de eerste manier. Omdat deze in § 11 tamelijk uitvoerig behandeld is, kan hier wel volstaan worden met een beknopte bespreking.

We beschouwen een deel A B van de grafiek van de functie $y = F(x)$, dat monotoon stijgt. Het corresponderende stuk van de grafiek der afgeleide functie $y' = f(x)$ zal zich dan boven de x-as bevinden. We denken ons deze twee grafieken weer in een boven- en benedenfiguur grafisch voorgesteld (fig. 18). In de figuur is het interval (a,b) van de x-as in drie gelijke delen verdeeld door de punten p en q, en op de kromme $y = F(x)$ zijn de corresponderende punten P en Q aangegeven; verder zijn de koorden A P, P Q en Q B getrokken, en tenslotte de rechten A P′, P Q′ en Q B′ evenwijdig met de x-as. We passen nu de middelwaardestelling toe op de bogen A P, P Q en Q B, en vinden dus, dat er op deze bogen punten X_1, X_2 en X_3 liggen, in welke de raaklijnen aan de kromme $y = F(x)$ evenwijdig zijn met de koorden A P, P Q en Q B. Zij ξ_i de abscis van X_i, en trekken we door X_i een rechte evenwijdig met de y-as; dan snijdt deze de onderste grafiek in een punt, waarvan de ordinaat $f(\xi_i)$ de grootte aangeeft van de afgeleide van de functie $y = F(x)$

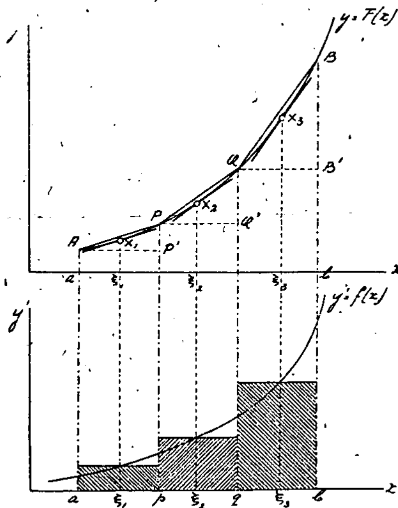


Fig. 18.

voor $x = \xi_i$, d.w.z. de helling van de grafiek $y = F(x)$ in het punt X_i. Maar deze helling is gelijk aan die van de bijbehorende koorde. Dus is de stijging van de koorde A P, d.w.z. de lengte van P P′, welke gelijk is aan $AP' \times \text{tg} \angle PAP'$, ook gelijk aan $(ap) \times f(\xi_1)$; maar dit stelt de oppervlakte voor van de eerste der gearceerde rechthoeken. Evenzo is de lengte van Q Q′ gelijk aan de oppervlakte van de tweede rechthoek en de lengte van B B′ gelijk aan de oppervlakte van de derde. De som der oppervlakten van de drie rechthoeken is dus even groot als de totale stijging van de gebroken lijn APQB, en deze is weer gelijk aan de stijging van de boog A B der kromme $y = F(x)$. Noemen we de som der oppervlakten van de rechthoeken $\sum_a^b O$, dan is dus $\sum_a^b O = F(b) - F(a)$. Aangezien nu deze zelfde betrekking bestaat voor een verdeling van het interval (a, b) in een willekeurig aantal gelijke delen, blijkt, op een dergelijke manier als in § 11, blz. 42, dat ook het oppervlak, ingesloten door de kromme $y = f(x)$, de ordinaten bij a en b, en de x-as gelijk is aan $F(b) - F(a)$, w.t.b.w.

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR. O. BOTTEMA.

V. DE TOTALE REACTIE VAN HET STEUNVLAK.

Steunt een lichaam met een plat grensvlak op een plat vlak, dan ondervindt het daarvan in het algemeen een tweetal reactionnaire krachten, nl. de *normale* reactie N en de *tangentiële* reactie of wel de wrijving W. De resultante van deze twee pleegt men de *totale* reactie te noemen.

Het is misschien de moeite waard op te merken, dat dit laatste begrip weliswaar zin heeft bij planimetrische opgaven (of zulke stereometrische, welke door de aanwezigheid van een symmetrievlak tot planimetrische zijn te reduceren), maar dat in het algemeen geen totale reactie bestaat, omdat N en W niet zijn samen te stellen, daar zij kruisende werklijnen hebben.

Een eenvoudig voorbeeld maakt dit onmiddellijk duidelijk. De homogene kubus ABCDEFGH (fig. 1) staat op het horizontale vlak. Langs EF werkt de kracht K. De ervaring leert, dat de kubus in evenwicht blijft, zolang K een zekere grens niet overschrijdt. Door de reactie van het vlak worden dus de krachten K en G opgeheven; daar deze laatste een paar kruisende krachten zijn, kunnen zij onmogelijk door één enkele kracht in evenwicht worden gehouden. N en G vormen een koppel met horizontale as, K en W vormen dus eveneens een koppel met horizontale as; hieruit volgt dat W langs BA valt. Is a de ribbe van de kubus, dan werkt dus in ABFE een koppel met moment Ka; hieruit volgt dat N ligt in het vlak door Z evenwijdig met ABFE en dat de afstand tot Z gelijk aan $\frac{Ka}{G}$ is.

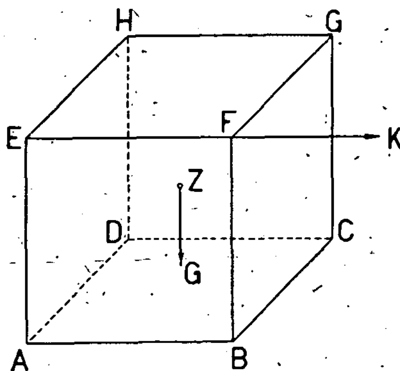


Fig. 1.

Werkt op een lichaam, dat op een horizontaal vlak staat, behalve

het gewicht één enkele kracht K, dan zal op grond van bovenstaande redenering de werklijn van de wrijving steeds vallen langs de horizontale projectie van de werklijn van K. Het kan dus heel gemakkelijk voorkomen, dat de wrijving geheel buiten het steunvlak ligt, terwijl toch evenwicht bestaat. Werkt op het lichaam ABCDEFGH (fig. 2) langs EF een (niet te grote) kracht K dan blijft het lichaam in evenwicht, de wrijving valt langs F′E′, welke geheel buiten het grondvlak ligt.

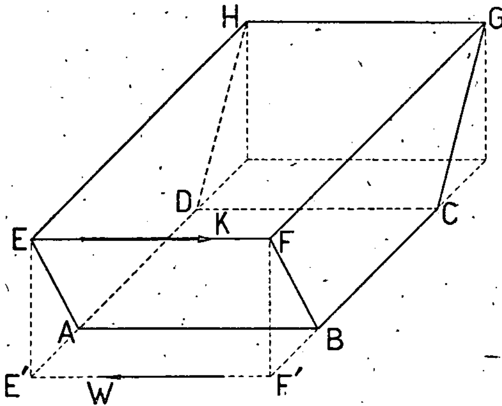


Fig. 2.

Veronderstellen wij dat over een geheel vlakdeel contact tussen de beide lichamen plaats vindt, dan is N de resultante van oneindig veel infinitesimale normale reactiekrachten en dus normaal; daar alle krachten gelijk gericht zijn, heeft N een werklijn die het steunvlak binnen de (convexe) begrenzing snijdt.

W is het resultaat van oneindig veel infinitesimale tangentiële reactiekrachten, die alle in het steunvlak liggen. Deze krachten hebben in het algemeen een resultante; deze ligt in het steunvlak, maar haar werklijn zal die van N in het algemeen kruisen en daar de elementaire krachten allerlei richtingen zullen hebben, kan W heel goed een werklijn hebben buiten de begrenzing van het steunvlak gelegen. Ook is het mogelijk, dat W uit een koppel bestaat. Dat geval zal zich b.v. voordoen als op onze kubus een uitwendig koppel werkt met verticale as.

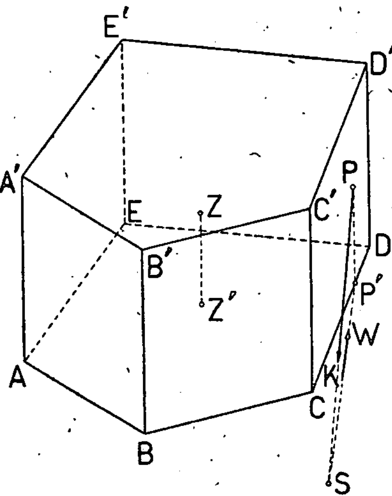


Fig. 3.

Op een lichaam met polygonaal grondvlak ABCDE, dat op het horizontale vlak staat, werkt één enkele kracht K langs de werklijn PS. (fig. 3). Als de wrijving groot genoeg is om uitglijden te

beletten, dan zal bij aangroeiende waarde van K het lichaam ten slotte in het algemeen om één der ribben van het grondvlak gaan kantelen. Om welke? Dat blijkt onmiddellijk uit de volgende overweging. Het gewicht G, dat langs ZZ′ werkt, de kracht K, de normale reactie N en de wrijving W maken evenwicht met elkaar. We weten dat W langs de projectie P′S vàn de werklijn PS van K valt, zodat K en W elkaar in S snijden; G en N zijn evenwijdig (en niet gelijk) en hebben dus een resultante, welke laatste dus door S moet gaan. Hieruit volgt: *het aangrijpingspunt van de normale reactiekracht N ligt op Z′S.* Die ribbe van het grondvlak welke door Z′S gesneden wordt, is dus de ribbe, waarom de eventuele kanteling plaats vindt.

VI. VLAKKEN, WAARVAN DE EERSTE EN DE DERDE DOORGANG SAMENVALLEN.

In de rechthoekige-projectiemethode der beschrijvende meetkunde, waarbij het eerste (horizontale) projectievlak τ_1 en ook het derde τ_3 in het tweede (verticale) τ_2 worden gewenteld, pleegt men nogal aandacht te wijden aan de vlakken, waarvan de eerste en de tweede doorgang samenvallen. Deze figuren hebben nauwelijks meer dan een anecdotische betekenis, maar zij kunnen dienen om te onderzoeken of de leerling de hem onderwezen constructies ook kan uitvoeren bij een buitenissige stand van de gegevens en het valt niet te ontkennen, dat bij deze opgaven verrassende effecten optreden.

De eis, dat U_1 en U_2 samenvallen betekent een enkelvoudige voorwaarde voor het vlak U en er zijn ∞^2 vlakken met de genoemde eigenschap. Het zijn die welke van de Y- en de Z-as tegengestelde stukken afsnijden; hun vergelijking luidt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{b} = 1$ en zij staan loodrecht op een bissectricevlak van τ_1 en τ_2 nl. het vlak $y + z = 0$.

Men kan ook de vlakken beschouwen, waarvoor U_2 en U_3 samenvallen en krijgt dan zoals te verwachten was, analoge resultaten. De voorwaarde is weer enkelvoudig; men verkrijgt de vlakken, welke van de Y- en de X-as tegengestelde stukken afsnijden en welke dus de vergelijking $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$ bezitten; zij zijn loodrecht op $x + y = 0$, een van de bissectricevlakken tussen τ_2 en τ_3.

Geheel anders wordt de situatie, als men voorschrijft, dat U_1 en U_3

samenvallen en dat behoeft ook niet te verwonderen, omdat van de drie projectievlakken τ_2 een bijzondere plaats inneemt.

De voorwaarde blijkt een tweevoudige te zijn; er zijn dan ook slechts ∞^1 dergelijke vlakken en deze blijken in twee stelsels uiteen te vallen. Wij zullen in het tekenvlak τ_2 een rechthoekig coördinatenstelsel (ξ, η) invoeren; de ξ-as valt met de X-as, de η-as met de Z-as samen, de met τ_1 gewentelde Y-as valt dus langs de — η-as, de met τ_3 gewentelde valt langs de — ξ-as. Het stuk dat U_1 van de η-as afsnijdt is voor elk vlak gelijk aan dat wat U_3 van de ξ-as afsnijdt. Gaat het vlak U niet door O en vallen U_1 en U_3 samen, dan moet U_1 de richting hebben van de rechte $\xi + \eta = 0$. U_2 valt ook met U_1 en U_3 samen en wij krijgen als het *ene stelsel vlakken van de gevraagde soort,* die welke *van de X-as, de —Y-as en de Z-as gelijke stukken afsnijden* en dus de vergelijking $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ bezitten; zij zijn evenwijdig met $y = x + z$.

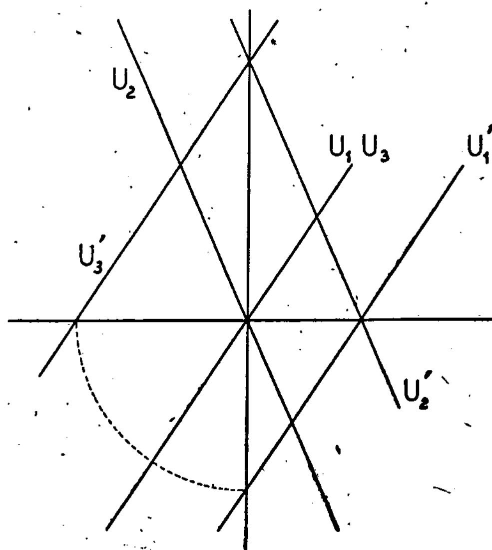


Fig. 1.

Een geheel andere toestand treedt in als het vlak U door de oorsprong O wordt gekozen. In de constructiefiguur kan men de rechte waarlangs zowel U_1 als U_3 valt willekeurig (door O) kiezen. Het vlak is dan bepaald. Wil men ook U_2 construeren, dan gaat dat misschien het beste door een vlak U′, evenwijdig met U te beschouwen. De richting van U_2 is dan die van U'_2 (fig. 1). Is φ de hoek welke U_1 met de ξ-as maakt en ψ de hoek van U_2 met deze as, dan blijkt uit een eenvoudige berekening, dat tussen φ en ψ de betrekking $\operatorname{tg} \psi = - \operatorname{tg}^2 \varphi$ bestaat; de doorgang U_2 ligt dus steeds in het tweede en vierde kwadrant van het (ξ, η) vlak.

Men kan de verzameling der vlakken van deze tweede categorie als volgt bepalen. In fig. 2 is door het punt A van de derde doorgang een eerste hoofdlijn getrokken en daarop het punt P aan-

genomen. Is φ de hoek tussen U_1 en ξ en zijn x, y, z de coördinaten van P, dan is $A_1P' = x \operatorname{tg} \varphi$, dus $OA' = OA_1 = OP' - A_1P' = -y - x \operatorname{tg} \varphi$ en daar $A_3A' = z$, heeft men

$$\frac{z}{-y - x\, tg\, \varphi} = tg\, \varphi,$$

zodat de vergelijking van het vlak luidt:

$x \operatorname{tg}^2 \varphi + y \operatorname{tg} \varphi + z = 0.$

Door een gegeven punt gaan dus in het algemeen twee vlakken van deze soort; zij vallen samen als de discriminant van de vierkantsvergelijking voor $\operatorname{tg} \varphi$ gelijk aan nul is. Hieruit volgt *dat de genoemde vlakken de raakvlakken zijn van een kwadratische kegel* met O tot top en die tot vergelijking heeft

Fig. 2

$$y^2 = 4xz.$$

De kegel raakt aan τ_1 volgens de X-as, aan τ_3 volgens de Z-as. De cyclische doorsneden zijn evenwijdig met de vlakken

$$x = (-2 \pm \sqrt{3})z.$$

VII. DE CIRKEL VAN TAYLOR.

In verschillende leerboeken der wiskunde treft men voetnoten of aanhangsels aan, waarin de lezer historische bijzonderheden kan vernemen over de belangrijkste theorema's en over de grote figuren uit de geschiedenis der mathesis. Hij is dan in staat aan een bepaald probleem of een bepaalde stelling een jaartal of althans een historische periode te verbinden. Zo vindt men b.v. in de talrijke werken van J. Versluys verschillende geschiedkundige opmerkingen en ook in een aantal schoolboeken wordt het systeem gevolgd. „Historische aantekeningen" van bij uitstek deskundige hand zijn ook opgenomen in het standaardwerk over planimetrie, dat onze taal bezit (Molenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde, 8e druk, Groningen, 1939). Het is naar aanleiding van één dezer aantekeningen, dat wij de volgende opmerking maken.

In genoemd werk komt, blijkens p. 633 van het Register de naam T a y l o r tweemaal voor en wel op de bladzijden 324 en 617. De eerste maal is er sprake van een meetkundig theorema, waarin een cirkel optreedt welke „de cirkel van T a y l o r" genoemd wordt; bij de tweede gelegenheid zijn wij in de genoemde „Historische aantekeningen" en wij kunnen kennis nemen van een kort levensbericht van T a y l o r. De lezer zal de conclusie moeten trekken, dat de bewuste meetkundige stelling op de een of andere wijze samenhangt met de wiskundige, wiens biografische bijzonderheden hem worden medegedeeld.

Dit nu is geenszins het geval. De man uit de „Historische aantekeningen" is niemand minder dan B r o o k T a y l o r, degene aan wie wij de in de differentiaalrekening zo gewichtige reeksontwikkeling danken, welke zijn naam draagt en die leefde van 1685—1731. De stelling over „de cirkel van T a y l o r" is een theorema uit de zogenaamde „nieuwere meetkunde van de driehoek", een merkwaardig, min of meer elementair hoofdstuk der wiskunde, dat ontwikkeld is in het laatste kwart der negentiende eeuw en waaraan b.v. de namen van L e m o i n e, B r o c a r d, N e u b e r g en P. H. S c h o u t e verbonden zijn. Blijkbaar zijn er dus méér T a y l o r s. De naam komt in de Angelsaksische landen veelvuldig voor en men behoeft slechts de Encyclopaedia Britannica op te slaan om te ervaren, dat de faam van vele T a y l o r s, die op verschillende gebieden des levens hun verdienste hadden, nog leeft bij de dankbare nazaat. Er zijn zelfs vele wiskundige T a y l o r s; zo noemt S i m o n in zijn „Entwicklung der Elementar-Geometrie im IX. Jahrhundert (Leipzig 1906) er — gezwegen van B r o o k — een vijftal, die alle hun bijdrage hebben geleverd tot de ontwikkeling der elementaire meetkunde.

Maar eer wien eer toekomt: de man aan wie de bewuste cirkel zijn naam dankt, is H e n r y M a r t y n T a y l o r, die geboren werd de 6e Juni 1842 te Bristol, dus meer dan een eeuw na het verscheiden van B r o o k T a y l o r. Wij lezen van hem, dat hij de Wakefield Grammar School bezocht en daarna te Cambridge studeerde, waar hij fellow werd van Trinity College. Na de voltooiing van zijn studie bleef hij verbonden aan de wiskundige staf van de universiteit en wel tot 1894. Niet lang daarna verloor hij het gezichtsvermogen, hij legde zich toe op het Braille-schrift en maakte zich verdienstelijk door het overbrengen van een aantal leerboeken over wiskunde, astronomie en geologie. Hij stichtte ook een fonds voor de bevordering van de uitgave van dergelijke werken voor blinden; het beheer van dit fonds werd in 1913 aanvaard door

de Royal Society. Hij overleed te Cambridge de 16e October 1927.

Taylor publiceerde naar het schijnt vooral artikelen over elementaire meetkunde. In de jaargangen 1875-1890 van de Messenger of Mathematics en van de Proceedings of the London Mathematical Society komt men herhaaldelijk zijn naam tegen. In het Repertorium van Pascal wordt de publicatie van de stelling welke ons bezighoudt in het jaar 1889 gesteld, maar Berkhan en Meyer (Enc. Math. Wiss. III, 1, p. 1255) geven de juiste inlichting: Taylor maakte zijn stelling bekend in de Mess. of Math. (2) 11 (1882), 177—179. Het artikel draagt de titel „On a six-point circle connected with a triangle".

Zoals men weet, gaat het over de volgende figuur. Zijn D, E en F uiteinden der hoogtelijnen uit A, B en C van de driehoek ABC en D_b en D_c de projecties van D op CA en AB, E_c en E_a die van E op AB en BC, F_a en F_b die van F op BC en CA, dan liggen D_b, D_c, E_c, E_a, F_a, F_b op één cirkel. Met enige goniometrie kan men de stelling b.v. als volgt bewijzen. Daar $AE = c \cos A$, is $AE_c = c \cos^2 A$ en daar $BD_c = c \cos^2 B$ is $AD_c = c \sin^2 B$. Evenzo is $AF_b = b \cos^2 A$ en $AD_b = b \sin^2 C$. Hieruit volgt $AE_c \,.\, AD_c = AF_b \,.\, AD_b$, zodat reeds E_c, D_c, F_b en D_b op één cirkel K_1 liggen. Evenzo liggen E_c, D_c, F_a en E_a op de cirkel K_2. De beide cirkels vallen samen, omdat de punten A, B en C elk t.o.v. beide cirkels dezelfde macht hebben.

Het bewijs van Taylor zelf is geheel meetkundig, al geeft hij tenslotte nog enige goniometrische betrekkingen. Hij bewijst door middel van hoeken en bogen, dat E_cF_b, F_aD_c en D_bE_a resp. evenwijdig zijn met BC, CA en AB en laat daaruit volgen dat de driehoeken AD_bD_c en E_aBE_c gelijkvormig zijn met ABC enz., waaruit dan de stelling zonder veel moeite volgt. De schrijver bewijst nog dat de driehoeken $D_bE_cF_a$ en $D_cE_aF_b$ onderling congruent zijn en gelijkvormig met driehoek ABC. Voor de gelijkvormigheidsfactor f vindt hij

$$f^2 = \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C$$

Aan de figuur van de cirkel van Taylor zijn nog een groot aantal eigenschappen verbonden. Enige ervan zijn bij Molenbroek in de vorm van een vraagstuk geplaatst. Uitvoerig is de figuur besproken bij Rouché et de Comberousse (Traité de Géométrie, I, Paris, 1935, p. 492 e.v.), waarbij echter de naam van Taylor niet genoemd wordt. Een duidelijke behandeling geeft ook het voortreffelijke boekje van Lalesco (La géométrie du triangle, Paris 1937, p. 58—59).

De cirkel van Taylor wordt meestal in verband gebracht met

de cirkels van T u c k e r, van welke hij, evenals de omgeschreven cirkel en de eerste en de tweede cirkel van L e m o i n e deel uit maakt.

Men kan zich de vraag voorleggen of de stelling belangrijk genoeg is om de naam van haar ontdekker te vereeuwigen, nog eens vaststellen, dat in dergelijke aangelegenheden het toeval een grote invloed heeft en zich niet onttrekken aan de indruk, dat H. M. T a y l o r, evenals b.v. M o l l w e i d e of S t e w a r t de onsterfelijkheid betrekkelijk gemakkelijk ten deel is gevallen. Niettemin is het een daad van eenvoudige rechtvaardigheid een poging te doen om te verhinderen, dat zijn verdiensten door een overigens terecht beroemdere naamgenoot worden geannexeerd.

NASCHRIFT. Ir. J. J. Tekelenburg maakt mij opmerkzaam op een zeer uitvoerig, hier te lande weinig bekend frans leerboek der planimetrie, dat de titel *Exercices de Géométrie* draagt en waarvan de schrijver slechts door *F. G. M.* wordt aangeduid. Ik raadpleegde de zevende uitgave (Paris; s. d.). Op p. 1192/93 wordt de cirkel van T a y l o r behandeld. Behalve de (niet geheel correcte) opmerking dat het artikel van T a y l o r in 1884 verschenen is, vindt men daar de mededeling, dat de bewuste cirkel reeds in 1877 in het *Journal de Mathématiques* voorkomt en in de zesde druk van C a t a l a n, *Théorèmes et problèmes de Géométrie* (1879) wordt besproken. Ik heb deze mededelingen niet kunnen toetsen.

HET AANKWEEKEN VAN HET WISKUNDIG DENKEN,

door K. Cuypers, doctor in de wetenschappen. (Brochurenreeks van de Vlaamse Opvoedkundige Vereeniging, Jaargang XIII, No. 3). Uitgave bezorgd door De Sikkel, Lamorinière-straat 116, Antwerpen: 239 bladz.

In een voorbericht, dat Maart '1940 gedagteekend is, geeft de schrijver van het hierboven genoemde boek rekenschap van zijn werk. De aan de wiskunde vijandige stroomingen die hij opmerkt zijn voor hem aanleiding zich bezig te houden met de beteekenis van de wiskunde als wetenschap en als onderwijsvak, waarbij hij zich beperkt tot de lagere en middelbare wiskunde. Daar hij zelf onderwijzer bij het Lager Onderwijs is geweest, maar ook een universitaire opleiding heeft genoten, meent hij objectief te kunnen oordeelen. Over de universiteit, die slechts geleerden kweekt, is hij slecht te spreken en wat de leeraren bij het M.O. betreft, ook bij hen ontbreekt de belangstelling voor paedagogische en didactische vraagstukken nagenoeg geheel.

Is nu dit werk een diepzinnige wetenschappelijke studie? In geenen deele en het wil dit ook niet zijn. De schrijver richt zich tot een groot publiek; de weinige wiskundige vaktaal, die hij bezigt, kan men — zoo zegt hij — desnoods wel overslaan. Het boek is veeleer een causerie, waarbij de schrijver zijn lezers rondleidt door allerlei gebieden die met de wiskundige wetenschap en het wiskunde-onderwijs in verband staan. Hij blijkt daarbij zeer belezen te zijn; dikwijls en met merkbare voorliefde haalt hij Felix Klein's „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" aan, verder de verschillende werken van H. Poincaré, C. A. Làisant (aan wiens werk „Là Mathématique: Philosophie, Enseignement" dit boek meermalen doet denken), maar even goed paedagogen en psychologen als Charlotte Bühler en met name J. Dewey, naar wiens bekend werk „How we think" hij dikwijls verwijst. Zijn kennis der literatuur is, zooals gezegd, zeer groot en strekt zich over vele landen uit; ook naar Noord-Nederlanders, vooral W. Reindersma, wordt vaak verwezen.

Het boek is ingedeeld in vier groote onderdeelen: I. Algemeene beteekenis en waarde van de wiskunde, II. De wetenschappelijke methoden der wiskunde, III. De vorm van de wiskundige mede-

deeling, IV. Psychologie en wiskunde. Deze zijn gesplitst in hoofdstukken en deze laatste weer in paragrafen van meestal een halve of een geheele bladzijde, die ieder een vaak pakkend opschrift dragen, wat aan het geheel een zekere levendigheid verleent.

Een overzicht van den inhoud te geven, welke als een film aan ons voorbij gaat, is uit den aard der zaak niet wel mogelijk. We doen slechts enkele grepen. Dat Dr. Cuypers de wiskunde hoog stelt, ook als vak van onderwijs, kan ons niet verbazen. Maar deze wetenschap eischt veel van hare beoefenaars en met instemming haalt hij de bekende uitspraak van Euclides aan, die volgens de overlevering aan Ptolemaeus Philadelphus geantwoord zou hebben, dat er voor koningen geen aparte weg tot de wiskunde bestaat (p. 25). De leerlingen met meer dan gewone aanleg daarentegen komen te kort en de schrijver is dan ook voorstander van afzonderlijke scholen voor meerbegaafden (p. 34).

Ook in andere opzichten is hij vooruitstrevend. Hij bepleit, mits in beperkte mate (p. 49 en 173) het inleidend onderwijs in de meetkunde op empirischen grondslag, zooals dat in ons land door Reindersma wordt voorgestaan en in verschillende landen burgerrecht heeft verkregen. Ook hier blijkt de schrijver goed van de literatuur op de hoogte te zijn; het werkje „Geometric exercises in paper folding" van Sundara Row is hem bekend, evenals ook het boekje „The first book of Geometry", geschreven door het echtpaar Young voor hun eigen kind, boeken die destijds zeer de aandacht trokken en ook in het Duitsch zijn vertaald.

Een warm voorstander is de schrijver van een betere opleiding der leeraren (p. 147 e.v.). Vooreerst is een meer wijsgeerige scholing noodig en een onderwijs ook in de lagere wiskunde, maar dan van hooger standpunt beschouwd. Dan moet ook de opleiding veel meer historisch georienteerd zijn en moet de geschiedenis eveneens een plaats hebben in het wiskunde-onderwijs der middelbare school. Met groote instemming haalt de schrijver hier Poincaré, Felix Klein en onzen landgenoot Hendrik de Vries aan.

Het boek is in de oude spelling en in goed Nederlandsch geschreven; slechts af en toe trekt een typisch Vlaamsch woord, zinswending of spreekwijze de aandacht van den Noord-Nederlandschen lezer. Over de taal, met name over de wiskundige vaktaal, spreekt ook Dr. Cuypers zelf (p. 120). Tot voor kort bestond in het Vlaamsch geen vaste wiskundige terminologie: de leeraren zelf hadden hun opleiding gewoonlijk in het Fransch gehad en voelden zich onzeker. Dit gaf in 1931 den Vlaamschen Leeraarsbond O.M.O. aanleiding een commissie in het leven te roepen, waarvan wijlen

Dr. Paul de Vaere secretaris was en die hierover een rapport in het licht gaf [1]).

De spelling van namen en het juist weergeven van titels en citaten laat wel eens te wenschen over. De Fransche schrijver en kanselredenaar, van wien onderaan p. 4 sprake is, heet Fénelon en niet Fénêlon, het Zwitsersche geslacht van geleerden heet Bernoulli en het bijvoeglijk naamwoord Bernouilliaansch (p. 94) is dus fout. De schrijver van de „Historische Paedagogiek" is Frater Rombouts en niet Rombauts (p. 132 noot). De titel van de oorspronkelijke Engelsche uitgave van het werk van Benchara Branford luidt *„A study* of mathematical education" en niet „Considerations", zooals de schrijver ten onrechte blijkbaar uit het Duitsch terugvertaalt. En de meening van Kant over wiskunde als bestanddeel van alle natuurwetenschap is onjuist aangehaald, althans wanneer daarmede bedoeld wordt Kant's bekende uitspraak in de Vorrede van de „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft". Onnauwkeurigheden als deze doen echter aan de goede eigenschappen van het boek geen afbreuk.

De waarde van het boek wordt verder zeer verhoogd door de zeer uitvoerige bibliographie (niet minder dan 30 bladzijden omvattend), die Dr. paed. A. van Impe aan het werk heeft toegevoegd en die eveneens getuigt van de groote belezenheid van den samensteller.

Utrecht, Mei 1946. D. J. E. SCHREK.

---

[1]) Woordenlijst van de Nederlandsche Wiskundige Vaktaal. Uitgave van den Vlaamschen Leeraarsbond O.M.O. No. 5. Hasselt, secretariaat van O.M.O.

VAN DE PERSONEN.

PROF. DR. C. VISSER

Aan de Technische Hoogeschool te Delft is benoemd tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica Dr. C. Visser, leraar aan de G.H.B.S. te Dordrecht.

Cornelis Visser werd geboren 8 April 1910 te Sliedrecht, studeerde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht en promoveerde aldaar in 1935 tot doctor in de wis- en natuurkunde op een proefschrift getiteld „Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes"; promotor was Prof. Dr. J. Wolff. Daarna studeerde hij enige tijd aan Amerikaanse hogescholen, nl. te Cambridge (Mass.) en Princeton (N.J.). In 1936 werd hij benoemd tot leraar aan de G.H.B.S. te Dordrecht.

De wetenschappelijke onderzoekingen van Prof. Visser liggen op verschillend gebied. Voortbouwend op het werk van Wolff, Carathéodory, Valiron e.a. heeft hij bijdragen geleverd tot de complexe functietheorie, vooral met betrekking tot de angulaire afgeleide en het randgedrag van conforme afbeeldingen.

Voorts hadden zijn aandacht onderwerpen uit de functionaalanalyse, de ergodentheorie en daarmee verwante gebieden (waarbij hij belangrijke algemene stellingen bewees met toepassing op incompressibele stationnaire stromingen), de waarschijnlijkheidsrekening en de meetkunde der getallen. In verschillende mathematische tijdschriften verschenen artikelen van zijn hand.

Prof. Visser zal in het begin van de cursus 1946/47 zijn ambt aan de Technische Hoogeschool aanvaarden.

PROF. DR. E. W. BETH.

Evert Willem Beth, die op 22 Mei jl. door den Amsterdamschen Gemeenteraad werd benoemd tot buitengewoon hoogleraar in de logica en haar geschiedenis en de wijsbegeerte der exacte wetenschappen, werd op 7 Juli 1908 te Stad Almelo geboren. Hij bezocht de R.H.B.S. te Almelo en die te Deventer, waar hij in 1925 eindexamen aflegde. Hij studeerde te Utrecht in de wis- en natuurkunde en legde in 1932 met lof het doctoraalexamen (hoofdvak wiskunde) af. Hierna zette hij zijn studie te Utrecht, later te Leiden, voort;

vervolgens, met steun van de Nederlandsche afdeeling van de Commissie voor intellectueele toenadering tusschen Nederland en België, aan de Vrije Universiteit te Brussel. In 1934 ontving hij een eervolle vermelding voor een antwoord op een door de faculteit der Letteren en Wijsbegeerte te Utrecht uitgeschreven prijsvraag over de wijsgeerige ruimteleer. Een bewerking van dit antwoord onder den titel „Rede en Aanschouwing in de Wiskunde" diende als proefschrift bij zijn promotie tot doctor in de Letteren en Wijsbegeerte te Utrecht op 22 November 1935, enkele maanden nadat hij het doctoraal examen in de Letteren en Wijsbegeerte (hoofdvak theoretische psychologie) had afgelegd. In 1936, '37 en '38 werden antwoorden van zijn hand bekroond op prijsvragen, uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap.

Van 1935 tot 1945 was hij werkzaam aan verschillende inrichtingen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs, het laatst aan de 2[de] H.B.S. met 5-j.c. B te Amsterdam. Deze werkzaamheden werden gedurende enkele jaren onderbroken door een studie in de rechtswetenschap te Amsterdam en een assistentschap te Delft.

Van zijn hand zijn verschenen „Inleiding tot de Wijsbegeerte der Wiskunde" (Antwerpen 1940; 2[e] druk 1942); „Summulae Logicales" (Groningen 1943), „De Wijsbegeerte der Wiskunde van Parmenides tot Bolzano" (Antwerpen 1944), „Geschiedenis der Logica" (den Haag 1944). Daarenboven een aantal artikelen, o.a. in „Euclides". Behalve van „Euclides" is hij medewerker van het „Journal of Symbolic Logic", het „Algemeen Tijdschrift van Wijsbegeerte en Psychologie" en van „Synthese".

KORRELS.

LXVIII. *Normaalvergelijking van een rechte en de bissectrices van de hoeken tussen twee rechten.*

§ 1. Is:

$$n(x, y) \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

de normaalvergelijking van een rechte, die niet door de oorsprong O van het (rechthoekige) assenkruis gaat, dan kan men daarin de hoek α steeds zo kiezen, dat $0° \leqq \alpha < 360°$ en dat p positief is. Daarbij is α de hoek, waarover men de positieve x-as in positieve zin moet laten draaien om samen te vallen met de normaal uit O op de rechte; de positieve draaizin is de zin waarover de positieve x-as 90° moet draaien om met de positieve y-as samen te vallen. De normaal is daarbij te beschouwen als een halve rechte met O als beginpunt en getrokken van O naar het voetpunt A op de rechte; p is dan de afstand van O tot het voetpunt A van de normaal (fig. 1).

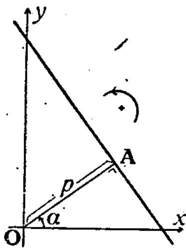


Fig. 1.

Nu is:

$$| n(x, y) | = | x \cos \alpha + y \sin \alpha - p |$$

de afstand van het punt $P(x, y)$ tot de rechte; $n(x, y)$ is positief voor de punten P van het ene halfvlak, waarin de rechte het coördinatenvlak verdeelt, negatief voor het andere en nul voor de punten P van de rechte zelf. Het halfvlak, waarin de oorsprong O ligt, bevat dan steeds de punten P, waarvoor het linkerlid der normaalvergelijking der rechte negatief wordt.

Zijn nu $n_1 = 0$ en $n_2 = 0$ de normaalvergelijkingen van twee elkaar snijdende rechten, die geen van beide door O gaan, dan stellen de vergelijkingen:

$$n_1 - n_2 = 0 \text{ en } n_1 + n_2 = 0$$

de bissectrices voor van de beide hoekc , die de rechten met elkaar maken.

De beide rechten verdelen het platte vlak in vier delen, die we van elkaar kunnen onderscheiden door de tekenparen $+ +$, $+ -$, $- +$ en $- -$, welke opvolgend aangeven de tekens van n_1 en n_2 na substitutie van de coördinaten van een punt $P(x, y)$ in die ge-

bieden gelegen. De oorsprong O ligt steeds in het gebied — —, zodat de vergelijking:

$$n_1 - n_2 = 0$$

die de bissectrice voorstelt, die verloopt in de gebieden + + en — — altijd de bissectrice geeft, die gaat door het gebied, waarin de oorsprong O ligt. De vergelijking:

$$n_1 + n_2 = 0$$

stelt de bissectrice voor, die loopt door de gebieden + — en — +, die zo liggen, dat de oorsprong in geen van beide ligt (fig. 2).

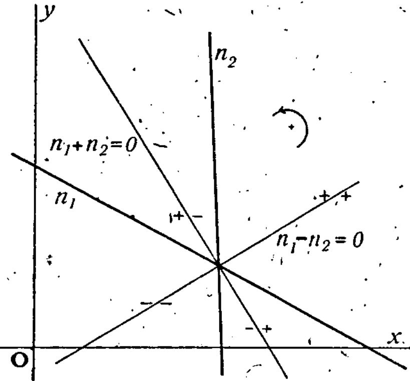


Fig. 2.

§ 2. Het bovenstaande is wel, in het kort, de manier, waarop dit onderwerp in vele boeken over analytische meetkunde wordt behandeld [1]). Een bezwaar tegen deze manier is, dat zij niet geldt voor rechten, die door de oorsprong O gaan, daar dan de hoek α niet op een veelvoud van 360° na, maar op een veelvoud van 180° na bepaald is, zodat daarvoor de normaalvergelijking op twee manieren te schrijven is. Het hangt dan van de keuze voor α af, welke bissectrice van de hoeken tussen de twee rechten door $n_1 - n_2 = 0$ en welke door $n_1 + n_2 = 0$ wordt voorgesteld. Ook zijn deze bissectrices nu niet te onderscheiden door de ligging van de oorsprong O.

Maar ook voor rechten, die niet door de oorsprong O van het assenstelsel gaan, is bezwaar te maken tegen de in § 1 gegeven wijze van behandeling van dit onderwerp. Beweegt namelijk een rechte zich evenwijdig met zichzelf zodanig, dat zij bij die beweging O passeert, dan zal eerst bij constante α de p veranderen tot nul, dan springt plotseling α over op $\alpha \pm 180°$, terwijl daarna weer bij constant blijvende hoek, de p zal gaan toenemen. Wil men bij voorbeeld de meetkundige plaats bepalen van de middens van evenwijdige koorden in een cirkel en stelt men de vergelijking van die cirkel:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

en de koorden:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

[1]) Zie ook: Korrel LXIII door Dr. A. Kettner in Euclides **20** (1943/44), 116—117.

waarin α constant is en p variabel, dan geldt deze laatste vergelijking slechts voor de koorden, die alle aan één kant van het middelpunt (de oorsprong) liggen en niet voor de overige.

Uit dit voorbeeld ziet men, dat het in de toepassingen bezwaarlijk zou kunnen zijn om te werken met den normaalvorm van rechten, zooals die in § 1 zijn gedefinieerd.

Een derde bezwaar, dat betrekking heeft op de vergelijking der bissectrice, is dit, dat men bij de definitie van § 1 te veel gebonden is aan een bepaalde figuur en aan de plaats daarin van het punt O, om te zien welke der bissectrices door de ene en welke door de andere vergelijking wordt voorgesteld. Dit bezwaar staat niet alleen in verband met de gegeven wijze van behandeling der normaalvergelijking van een rechte, maar ook met de minder doelmatige manier, waarop vaak het begrip „hoek" is gedefinieerd. In het volgende is steeds sprake van de hoek tussen twee halfrechten, d.w.z. rechten, waarop een bepaalde zin als de positieve is aangenomen (gerichte rechten); neemt men dan ook nog in het vlak van deze rechten een positieve draaizin aan, dan verstaat men onder $\angle l_1 l_2$ tussen twee halfrechten l_1 en l_2 de hoek, waarover l_1 in positieve zin moet draaien om, ook wat de positieve zin betreft, samen te vallen met l_2. Hierdoor wordt een hoekenklasse met modulus 360° bepaald; hoeken van eenzelfde klasse heten met elkaar congruent [1]).

§ 3. Om aan de bovengenoemde bezwaren tegemoet te komen, mag een andere wijze van behandeling van de normaalvergelijking gewenst geacht worden; in het volgende is een behandelingswijze uiteengezet, die aan deze bezwaren tegemoet komt.

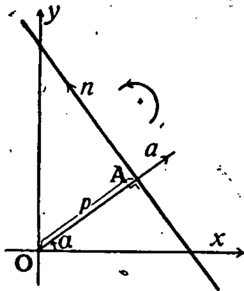


Fig. 3.

De normaalvergelijking:

$$n(x, y) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p \doteq 0$$

stelt voor elke reële waarde van α en voor elke reële waarde van p een halfrechte (dus gerichte rechte) voor (in een rechthoekig assenstelsel), die op de volgende manier getekend kan worden (fig. 3).

Trek door de oorsprong O een halfrechte a zodanig dat $\angle\, xa \equiv \alpha \pmod{360°}$ d.w.z. door draaiing over een hoek α in positieve zin valt de positieve x-as met de halfrechte a samen, ook wat de zin betreft. De positieve

[1]) Zie: Dr. Fred. Schuh, Leerboek der nieuwe vlakke driehoeksmeting (den Haag 1939), Dr. Fred. Schuh en Ir. W. J. Vollewens, Nieuw leerboek der vlakke driehoeksmeting (den Haag 1939).

draaiïngszin is bij een gegeven assenstelsel steeds zo te kiezen, dat $\angle xy \equiv 90^\circ \pmod{360^\circ}$ is, dus zo dat de positieve x-as bij draaiïng over 90° samenvalt met de positieve y-as.

Op die halfrechte a zet men vanaf O een lijnstuk OA $= p$ uit; is p positief dan naar de positieve kant op a, is p negatief dan een lijnstuk ter lengte $- p$ naar de negatieve kant (in fig. 3 is p positief genomen). In het punt A wordt nu de loodlijn n op a getrokken en op deze rechte n wordt de positieve zin zo gekozen, dat $\angle an \equiv 90^\circ$ (mod 360°) wordt. Daardoor wordt de rechte n tot een halfrechte; de gegeven vergelijking stelt niet alleen de rechte voor, maar door de vorm waarin zij geschreven is, geeft zij ook de positieve zin daarop aan. Dit geldt ook omgekeerd; een gegeven halfrechte is slechts op één wijze op de boven gegeven manier in normaalvergelijking te brengen.

Ook bij deze definitie (die voor positieve waarden van p dezelfde is als die van § 1) is $|n(x, y)|$ de afstand van $P(x, y)$ tot de rechte en wordt het coördinatenvlak verdeeld in twee halfvlakken, zodanig, dat voor punten in het positieve halfvlak $n(x, y)$ positief en voor punten in het negatieve halfvlak $n(x, y)$ negatief is. De pijl van de gerichte normaal a wijst steeds „in" het positieve halfvlak. Kijkt men in de positieve zin langs de rechte, dan heeft men het positieve halfvlak steeds aan de rechterkant. De oorsprong O kan nu zowel in het positieve als in het negatieve halfvlak liggen en ook op de rechte.

Keert men op de halfrechte n de positieve zin om, dan spreekt men van de „tegengestelde" halfrechte n'. Is:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

de normaalvergelijking van de rechte n, dan is die van de tegengestelde rechte n':

$$x \cos (\alpha \pm 180) + y \sin (\alpha \pm 180) + p = 0$$

Daar $\cos (\alpha \pm 180) = - \cos \alpha$ en $\sin (\alpha \pm 180) = - \sin \alpha$, komt dit hierop neer, dat men de beide leden van de vergelijking voor n met -1 heeft vermenigvuldigd. Door verandering van alle tekens van de termen der vergelijking wordt dus de zin op de voorgestelde rechte omgekeerd of wat op hetzelfde neerkomt, het positieve en het negatieve halfvlak aan weerskanten van de rechte, verwisselen van plaats.

Hebben de normaalvergelijkingen van twee halfstralen gelijke waarden voor α, dan lopen die stralen evenwijdig in dezelfde zin (het geval dat zij samenvallen is hierin inbegrepen); verschillen de α-waarden 180° of een oneven veelvoud van 180°, dan lopen

de rechten evenwijdig in tegengestelde zin (samenvallen weer inbegrepen).

Voor de in § 2 gedefinieerde hoek tussen twee halfrechten n_1 en n_2 geldt bij deze opvatting van de normaalvergelijking steeds:

$$\angle\, n_1 n_2 \equiv \alpha_2 - \alpha_1 \pmod{360^\circ}$$

waarin α_1 en α_2 de richtingshoeken van de normalen der beide rechten zijn.

Zijn twee elkaar snijdende halfrechten n_1 en n_2 in het vlak door hun normaalvergelijkingen gegeven, dan verdelen zij het vlak in vier delen, die door de tekencombinaties $++$, $+-$, $-+$ en $--$ zijn te onderscheiden (fig. 4). De as van symmetrie b in de figuur, waarvoor de halfrechten n_1 en n_2, ook wat hun positieve zin betreft, elkaars spiegelbeeld zijn, heet de *binnenbissectrice* van $\angle\, n_1 n_2$ (en van $\angle\, n_2 n_1 \equiv -\angle\, n_1 n_2$); hiervoor geldt $\angle\, n_1 b \equiv \angle\, b n_2$. De loodrecht op b staande rechte b_1 door het snijpunt, die de hoeken $\angle\, n_2 n_1'$ en $\angle\, n_2' n_1$ middendoor deelt, heet de *neven- of buitenbissectrice* van $\angle\, n_1 n_2$.

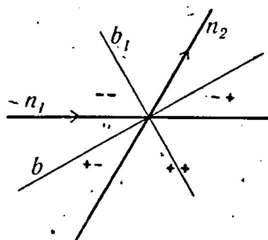
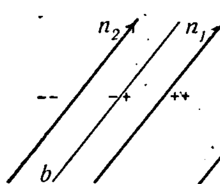


Fig. 4.

Voor halfrechten die evenwijdig zijn in dezelfde zin (fig. 5) vervalt één der gebieden $+-$ of $-+$, de binnenbissectrice is dan de rechte die tussen n_1 en n_2, op gelijke afstanden daarvan verwijderd, daarmee evenwijdig loopt, de middelevenwijdige; de



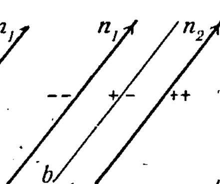
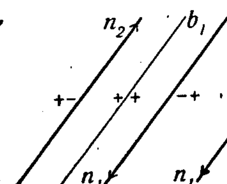


Fig. 5.



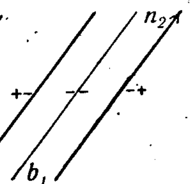


Fig. 6.

nevenbissectrice vervalt. In het geval van twee in tegengestelde zin evenwijdig lopende halfrechten (fig. 6) vervalt één der velden $++$ of $--$. Er is dan geen binnenbissectrice; de nevenbissectrice b_1 is nu de middelevenwijdige.

Aan de binnenbissectrice b en de nevenbissectrice b_1 kennen we geen positieve zin toe.

In elk der gevallen is op te merken, dat de binnenbissectrice b verloopt in de gebieden $+-$ en (of) $-+$, de nevenbissectrice steeds in de gebieden $++$ en (of) $--$.

§ 4. In de voorgaande paragraaf vonden we dat de binnenbissectrice steeds verloopt in de velden met ongelijke tekens, de nevenbissectrice in de velden met gelijke tekens. Dit betekent, dat de afstanden van punten der binnenbissectrice van $\angle\, n_1 n_2$ tot de benen van die hoek steeds tegengesteld gelijk zijn; voor de punten van de nevenbissectrice zijn deze afstanden, ook wat het teken betreft, gelijk.

Zijn dus $n_1 = 0$ *en* $n_2 = 0$
de normaalvergelijkingen van twee halfrechten (in de zin van § 3),
$n_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$ en $n_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2$,
dan stelt steeds de vergelijking

$$n_1 + n_2 = 0$$

de binnenbissectrice voor van $\angle\, n_1 n_2$, *en de vergelijking*

$$n_1 - n_2 = 0$$

de nevenbissectrice van die hoek.

Ir. W. J. VOLLEWENS.

LXIX.

Interpolatie en logarithmentafels.

In jaargang **15** (1938/39), p. 14—15 van „Euclides" heeft de heer Eilander zijn bezwaren geuit tegen de inrichting der vierdecimalige tafels zooals die op onze scholen gebruikt worden; de leerlingen leeren niet goed interpoleeren. Hij acht het noodig, dat men in de vierdecimalige logarithmentafels der goniometrische functies tot de honderddeelige verdeeling overgaat. Een vierdecimalige tafel, die opklimt met 0,1 is wèl geschikt voor interpolatie op honderdsten van graden. In den loopenden jaargang (**21**, p. 61—63) roert Prof. Bottema deze quaestie weer aan.

De lezers zullen nu allicht met belangstelling vernemen, dat in Zweden bij het onderwijs tafels [1]) worden gebruikt, die volgens de decimale verdeeling zijn ingericht; niet de rechte hoek, maar de graad wordt decimaal onderverdeeld. Men vindt log sin x in vier decimalen gegeven van 0° tot 90° met opklimming van 0°,1, bovendien voor x tusschen 0° en 10° met opklimming van 0°,01. Evenzoo

1) Räknetabeller för läroverken, utgivna av J. S. Hedström och C. Rendahl. Stockholm, Svenska bokförlaget.

log tg x. De differenties loopen van 43 tot 1, zoodat in een groot deel van de tafels interpolatie zeer goed mogelijk is.

De tafels vertoonen veel overeenkomst met de Tafels in vier decimalen van Dr. H. J. E. Beth [1]), waar evenwel de onderverdeeling in minuten is gehandhaafd en de opklimming met 6′ geschiedt.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van Waltman — Delft:

Ir. W. J. VOLLEWENS, Repertorium der Wiskunde voor Ingenieurs; deel IIIA, 193 blz.; 26 fig.

Inhoud. Determinanten; lineaire verg.; hogere-machtsverg.; reeksen; functies en limieten; differentiëren; Rolle; reeksen van Taylor en Mac-Laurin; onbepaalde vormen; max. en min.; meetkundige toepassingen; functies van complexe waarden van het argument.

Van P. Noordhoff — Groningen:

C. J. ALDERS, Algebra I **5e druk,** gec. *f* 2.00*.
„ Algebra IIA **4e druk** *f* 2.10*; antw. 2e druk.
„ Vlakke Meetkunde **5e druk,** gec. *f* 3.40*.
„ Stereometrie **2e druk,** gec. *f* 2.00*.
„ Beschr. Meetkunde **2e druk,** gec. *f* 1.65*.

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, Rekenboek voor de H.B.S. I, **21e druk.**

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, Log-, Intrest- en Discontotafels **5e druk,** gec. *f* 4.50*.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, Stereometrie voor het M. en V.H.O., **7e druk,** *f* 2.60*, gec. *f* 3.10*.

NOORDHOFF'S Schooltafel **6e druk,** *f* 2.00*.

NOORDHOFF'S Tafel in 4 decimalen **9e druk,** *f* 1.35*.

P. WIJDENES, Beknopte Algebra I **9e druk,** *f* 2.35*.
„ „ „ II **9e** „ *f* 2.35*.
„ Klein Leerboek der Algebra I **3e druk,** gec. *f* 2.10*.
„ Algebra voor M.U.L.O. I **35e druk,** *f* 1.80*.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra I **16e druk,** *f* 2.90*; III **10e druk,** *f* 2,90*.

---

[1]) Groningen, P. Noordhoff, 1941.

HET ONTWERP V 1420 MET DE SYMBOLEN VOOR DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

Zie deze jaargang blz. 154 en 155. Op blz. 154 staat, dat in het eerste ontwerp Jg. 19 blz. 61 een wijziging is gebracht: „de regels voor het gebruik van accenten en aanwijzers in de rechthoekige projectie zijn om practische redenen in dien zin gewijzigd, dat de eerste voor het aanduiden der projecties zijn bestemd, de laatste voor het aanduiden van een aantal gelijksoortige elementen".

Over de accenten-rage vindt men iets geschreven op blz. 41 van deze jaargang; de lezer wordt verzocht die bladzijde op te slaan. Waar het maar enigszins mogelijk is, moeten we geen accenten gebruiken.

Zowel bij het lezen als bij het uitspreken is het veel eenvoudiger $A_2B_2C_2$ te lezen als *a* twee, *b* twee, *c* twee, dan $A''B''C''$ als *a* dubbel accent, *b* dubbel accent, *c* dubbel accent. Nu ziet men onder 5) op blz. 155, dat de reden van de afwijking om alles op V_1 met 1, alles op V_2 met 2 te merken, ligt in het feit, dat er bij de regelvlakken b.v. 10 lijnen *l* voorkomen op de tekening en dat men die wenst te noemen l_1, l_2, l_3, l_4, ..., l_{10}; niets op tegen. Maar waarom zouden we dan de projecties van l_6 b.v. niet aanwijzen met $l_{6.1}$ en $l_{6.2}$; of wat nog handiger is, de lijnen l^1, l^2, l^3, l^4, l^5, ... en de projecties l_1^5, l_2^5. Van enige verwarring met machtsverheffing kan toch zeker geen sprake zijn, evenmin als in de meetkunde, als men schrijft AB^2. Om door de regelvlakken alleen voortdurend opgescheept te zitten met de accenten, is m.i. ongewenst. Alle regels van blz. 155 spreken over 1, 2, een, twee; alleen ter wille van het tellen van enige gelijksoortige elementen daarvan af te wijken voor het aanduiden van projecties, vind ik te dwingend. In plaats van 5 van het ontwerp stel ik voor te lezen:

5. *Lijnen worden aangeduid met Latijnse kleine letters; heeft men enige gelijksoortige lijnen, dan worden die geteld door hun nummer boven rechts te schrijven.*

Voorbeelden: a, b, p, q; l^5, l^6, l^7.

En dan moet 6 aldus luiden:

6. *Projecties van punten en lijnen op de projectievlakken* V_1, V_2 *en* V_3 *worden gekenmerkt door hun letteraanduidingen opv. te voorzien van 1, 2 en 3.*

Voorbeelden: A_1, A_2, A_3; l_1, l_2, l_3; l_1^7; l_2^7.

Projecties op een hulpvlak met aanwijzer 4.

En dan is er ook wel wat tegen de Griekse kleine letters; waarom

in 1 V_1, V_2, V_3 ook aan te duiden als τ_1, τ_2, τ_3? En waarom in 8 vlakken aangeduid met Griekse kleine letters? Hebben we niet genoeg aan de genoemde Latijnse hoofdletters? Evenmin vind ik het gewenst de eerste letters van de woorden raakvlak enz. met een Griekse letter te schrijven.

Verder ben ik er niet voor het tafreel bij de axonometrische en scheve projectie met τ aan te duiden (de drie vlakken bij de ax. pr. met τ_1, τ_2, τ_3 zou men allicht als drie tafrelen aanzien!) maar liever met een kloeke Latijnse hoofdletter T; de Griekse lettertjes zijn geheel onnodig, bovendien prutsig klein vergeleken met de Latijnse hoofdletters; dus misstaan ze in een figuur.

H. J. E. BETH.
P. WIJDENES.

INHOUD VAN DE 21e JAARGANG 1945/46.
(De jaargang 1944/45 is overgeslagen.)
